



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE ENERGIAS ALTERNATIVAS E RENOVÁVEIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENERGIAS RENOVÁVEIS



HYGOR MATHAEUS AFONSO SANTOS

**APLICAÇÕES DE UMA FORMULAÇÃO ACURADA E
CONVERGENTE PARA SIMULAR A CONDUÇÃO DE
CALOR TRANSIENTE EM MATERIAL ANISOTRÓPICO
NO CONTEXTO DE USINAGEM COM LASER PARA
REUTILIZAÇÃO DE PÁS DE TURBINAS EÓLICAS**

**JOÃO PESSOA – PB
2024**

PPGER / MESTRADO ACADÊMICO / N° 109

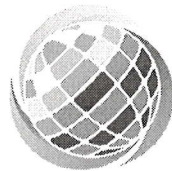
HYGOR MATHAEUS AFONSO SANTOS

**APLICAÇÕES DE UMA FORMULAÇÃO ACURADA E CONVERGENTE PARA
SIMULAR A CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE EM MATERIAL
ANISOTRÓPICO NO CONTEXTO DE USINAGEM COM LASER PARA
REUTILIZAÇÃO DE PÁS DE TURBINAS EÓLICAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal da Paraíba, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Energias Renováveis do Centro de Energias Alternativas e Renováveis, área de concentração em energias renováveis, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador(a)
Dr(a). Márcio Rodrigo de Araújo Souza

**JOÃO PESSOA – PB
2024**



ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

ATA nº 109 da Sessão de Defesa Dissertação do Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-Graduação em Energias Renováveis do Centro de Energias Alternativas e Renováveis, Universidade Federal da Paraíba.

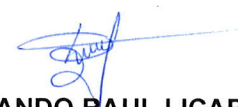
Ao trigésimo dia do mês de janeiro de dois mil e vinte e quatro foi instalada a Banca de Defesa de Dissertação do Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-Graduação em Energias Renováveis do Centro de Energias Alternativas de forma PRESENCIAL, as 15h00, no Sala 06 do Bloco da Pós graduação do CCSA a que se submeteu a defesa pública de **HYGOR MATHAEUS AFONSO SANTOS**, matrícula **20211019859**, com o título "APLICAÇÕES DE UMA FORMULAÇÃO ACURADA E CONVERGENTE PARA SIMULAR A CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE EM MATERIAL ANISOTRÓPICO NO CONTEXTO DE USINAGEM COM LASER PARA REUTILIZAÇÃO DE PÁS DE TURBINAS EÓLICAS". A Comissão Examinadora esteve constituída pelos professores: MÁRCIO RODRIGO DE ARAÚJO SOUZA (UFPB), TAYNARA GEYSA SILVA DO LAGO (UFPB), FERNANDO RAUL LICAPA CONTRERAS (UFPE). Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o(a) candidato(a) foi APROVADO, pela Comissão Examinadora. E, para constar, foi lavrada a presente ata, assinada pelos membros da Comissão.

Observações: _____

Membros da Banca Examinadora:


Prof.^ª Dr.(a) MÁRCIO RODRIGO DE ARAÚJO SOUZA
Orientador(a)


Prof.^ª Dra. TAYNARA GEYSA SILVA DO
LAGO
Examinador(a) Interno(a)


Prof. Dr. FERNANDO RAUL LICAPA CONTRERAS
Examinador(a) Externo(a)

PPGER/CEAR/UFPB - Campus I, Caixa Postal 5115, CEP: 58051-900, João Pessoa - PB, Brasil.

Obs.(1): O discente deverá encaminhar a coordenação do PPGER, no prazo máximo de 45 dias a contar da data da defesa, os exemplares definitivos da dissertação.

Obs.(2): O docente deverá encaminhar a coordenação do PPGER, no prazo máximo de 20 dias a contar da data da defesa, o relatório de orientação para avaliação do colegiado.

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237a Santos, Hygor Mathaeus Afonso.

Aplicações de uma formulação acurada e convergente para simular a condução de calor transiente em material anisotrópico no contexto de usinagem com laser para reutilização de pás de turbinas eólicas / Hygor Mathaeus Afonso Santos. - João Pessoa, 2024.

55 f. : il.

Orientação: Márcio Rodrigo de Araújo Souza.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CEAR.

1. Energia eólica. 2. Método de Volumes Finitos. 3. Aproximação de Fluxo Multiponto (MPFA). 4. Aproximação de Fluxo de Dois Pontos (TPFA). I. Souza, Márcio Rodrigo de Araújo. II. Título.

UFPB/BC

CDU 621.548(043)

RESUMO

A busca por um destino sustentável e viável economicamente para reutilização de pás usadas em aerogeradores empregados na geração eólica é motivo de discussão e pesquisa no mundo todo. Elas são feitas de materiais compósitos, geralmente de fibras reforçadas por polímeros (FRP). Muitas vezes o destino encontrado demanda a usinagem desse material, que é feito através de cortes utilizando um laser. Devido às características do material, é necessário conhecer como se dá a transferência de calor em meio anisotrópico, para que seja feito um controle do calor proveniente do laser e que se espalha pela região adjacente, chamada de zona termicamente afetada do material (HAZ). A simulação numérica é uma ferramenta bastante atraente para compreender este processo. Este trabalho visa utilizá-la, aplicando duas abordagens do Método de Volumes Finitos para avaliar a HAZ, sendo elas a Aproximação de Fluxo Multiponto (MPFA) e a Aproximação de Fluxo de Dois Pontos (TPFA). A primeira se mostra mais adequada para trabalhar com materiais em meio anisotrópico, enquanto a segunda não é capaz de gerar uma solução acurada a depender da configuração de anisotropia considerada. Foram avaliados dois casos, sendo um de referência onde a convergência dos métodos teve a convergência com a solução analítica avaliada, e o caso do laser na pá eólica, que teve sua conclusão fundamentada no caso de *benchmark* anterior.

Palavras-Chave: Método de Volumes Finitos; MPFA; TPFA; Energia eólica.

ABSTRACT

The search for a sustainable and economically viable destination for reusing blades used in wind generation is a reason for discussion and research around the world. They are made of composite materials, usually fiber reinforced polymers (FRP). Often the destination found requires the machining of this material, which is done through cuts using a laser. Due to the characteristics of the material, it is necessary to know how heat transfer occurs in an anisotropic environment, so that heat from the laser can be controlled and spread throughout the adjacent region, called the material's thermally affected zone (HAZ). Numerical simulation is a very attractive tool for understanding this process. This work aims to use it, applying two Finite Volume Method approaches to evaluate the ZTA, namely the Multipoint Flow Approximation (MPFA) and the Two-Point Flow Approximation (TPFA). The first is more suitable for working with materials in an anisotropic environment, while the second is not capable of generating an accurate solution depending on the anisotropy configuration considered. Two cases were evaluated, one being a reference where the methods converged with the analyzed analytical solution, and the case of the laser on the wind blade, which had its conclusion based on the previous benchmark case.

Keywords: Finite Volume Method; MPFA; TPFA; Wind energy.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	6
2. MODELO MATEMÁTICO	12
2.1 CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO	13
2.2 CONDUTIVIDADE TÉRMICA	15
3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA	17
3.1 O PROCESSO DE DISCRETIZAÇÃO	19
3.2 TPFA	22
3.3 MPFA	24
4. APLICAÇÕES E RESULTADOS	32
4.1 CASO 1	32
4.2 CASO 2	36
5. CONCLUSÃO	43
ANEXO A	45
REFERÊNCIAS	51

1. INTRODUÇÃO

O mundo e as pessoas que nele vivem têm necessidades e prioridades que variam ao longo dos séculos. E cada mudança estimula a busca por materiais que suas propriedades e características sejam condizentes com as necessidades de cada período. No início da humanidade, por exemplo, a dependência da caça fez os homens desenvolverem pedras afiadas que auxiliavam para a morte e tratamento dos animais que serviriam de alimento para aquela população.

Com o advento da agricultura, passou-se a valorizar os objetos que faziam o tratamento do solo, transporte da água, entre outras necessidades que eram pertinentes àquele contexto histórico. Rodrigues, Silva e Guerra (2012) destacam que um importante salto das civilizações se deu há 7000 anos, com o uso de metais. Desses, o primeiro a ser usado foi o cobre. No início, ele era usado no estado nativo, e era trabalhado a frio ou a quente.

Mas um importante avanço foi o desenvolvimento de técnicas mais robustas para seu tratamento, como a fundição. Isso permitiu que ele fosse facilmente modelado em diferentes formas e misturado com outros metais. Segundo Rodrigues, Silva e Guerra (2012), acredita-se que essas práticas tiveram início por volta de 3500 a.C., no Egito.

Até hoje a mistura de materiais é usada em diversos contextos. Quando é envolvido pelo menos um metal, elas são chamadas de ligas. Alguns exemplos são o latão, o aço e o bronze. Quando a mistura envolve dois ou mais componentes que não são de natureza metálica, dá-se o nome de compósito. Alguns exemplos comuns são o concreto, madeira, e as fibras, como de vidro e carbono.

Daniel e Ishai (1994) definem um compósito como constituído de dois ou mais materiais com diferentes propriedades, cuja o objetivo é obter um material com propriedades superiores ao que cada um apresenta isoladamente. Leite (2015) destaca que um compósito é composto por uma fibra e uma matriz, que quando combinados funcionam de maneira interativa e criam um novo material, cuja as propriedades mecânicas individuais são complementadas.

Os compósitos formados por polímeros (na condição de matriz) reforçados com fibra estão sendo bastante usados para aplicações na engenharia nos últimos anos. As fibras empregadas podem ser de carbono ou de vidro. Os compósitos que levam as fibras de carbono são conhecidos pela sigla CFRP, do inglês *Carbon fiber reinforced plastics*. Eles têm como principais características a leveza, alta resistência, rigidez e uma boa estabilidade

dimensional. Costumam ser empregados na indústria naval e automotiva (ZHANG *et al*, 2020).

Já os compósitos que levam as fibras de vidro são conhecidos pela sigla GFRP, do inglês *Glass fiber reinforced plastics*. Suas características são semelhantes às da fibra de carbono, mas num comparativo entre elas, as fibras de vidro têm menor resistência à tração, menor elasticidade e são consideravelmente mais baratas (FIORELLI, 2002). E essas características transpassam para o GFRP.

Essa combinação de materiais distintos de forma não diluída coloca esses compósitos na condição de um material heterogêneo. Esta característica é consequência de ele apresentar elementos de natureza diferentes ao longo de sua estrutura. O seu oposto, os materiais homogêneos, apresentam um material de mesma característica ao longo de toda sua extensão.

Uma aplicação bastante comum da GFRP é nas pás de aerogeradores. Fadigas (2011) explica que o uso de um polímero complementar à fibra de vidro em uma pá tem o objetivo de baratear o produto. As características de resistência, tendência a defletir sob carga e a resistência à fadiga são essenciais para seu bom funcionamento.

As pás de aerogeradores são usadas por um período de 20 a 25 anos e podem ter três destinos após o fim da sua vida útil: O descarte em aterros, a incineração ou a reciclagem (MAJEWSKI *et al*, 2022). Apesar do uso delas em operação ser extremamente limpo, as fases de fabricação e de fim de vida são um problema ambiental, tanto do ponto de vista de resíduos, quanto de consumo de energia (LIU, MENG e BARLOW, 2022).

A preocupação com os resíduos é maior porque tem sido registrado um crescimento considerável da fonte eólica nos últimos anos. Somente entre 2020 e 2021 houve um incremento de 93,6 GW na potência instalada no mundo, que passou a ser de 837 GW. (GWEC, 2022). E o descarte tende a crescer na mesma proporção, sendo a expectativa de que até 2050 haja 43 milhões de toneladas de resíduos de descarte no mundo (LIU e BARLOW,2017).

Há várias aplicações possíveis e que têm sido avaliadas para esses resíduos. Bank (2019) fez um estudo sobre a reutilização das pás na construção de habitações na região de Yucatan, no México. A região tem uma grande incidência de furações e inundações, e o material se mostra bastante resistente a esses fenômenos.

Já Yazdanbakhsh, Bank e Tian (2018) estudaram sobre o uso do GFRP das pás diluído no concreto. Uma conclusão importante foi que o GFRP suporta duas vezes mais tensão que o aço, e tem apenas 25% do seu peso. Um

empecilho encontrado foi de que os polímeros termofixos, que representam 75% do volume dos compósitos, não se fundem em altas temperaturas.

A opção da reciclagem do compósito como opção às fibras novas foi considerada em Nagle *et al* (2022). O estudo verificou que quando o processo de reciclagem envolve a pirólise (reação de decomposição térmica que ocorre por meio da exposição a altas temperaturas e ambiente desprovido ou com pouca quantidade de oxigênio) ele não é economicamente viável. A obtenção de fibras virgens é consideravelmente mais barata.

Nagle *et al* (2022) também destacam que as aplicações que demandam apenas a utilização das lâminas em segunda vida têm ganhado popularidade ao redor do mundo. Aplicações como uso em bueiros, pontes, divisórias para gado e grãos, cabanas para *camping*, jardineiras, pontos de ônibus e abrigos de bicicletas são algumas das opções possíveis.

Para proporcionar o descarte através da reciclagem, é essencial conseguir fazer um bom manejo desse material. Os GFRPs são materiais difíceis de cortar devido a sua natureza não homogênea e à anisotropia presente na estrutura. Quando são usados processos de usinagem inadequados, geralmente ocorrem danos específicos de compósitos fibrosos, como delaminação, rebarbas e arrancamento de fibras (LUKÁCS, PERESZLAI e GEIER, 2023).

Uma das formas indicadas de fazer o corte é através da usinagem a laser, que atua no material através da cauterização. Zhang *et al* (2020) destacam que o laser tem vantagens no processamento de materiais compósitos devido a sua rápida velocidade, por ser flexível e ter um alto grau de automação. Mas, devido à diferença nos pontos de fusão e sublimação do polímero e da fibra, respectivamente, sua atuação causará danos térmicos na área próxima, a chamada Área afetada termicamente, que é identificada pela sigla HAZ, que vem do inglês *Heat Affected Zone*.

A HAZ pode ser estudada de duas formas: Ou levando-se a peça para um laboratório e analisando-a ou fazendo uma simulação computacional. O primeiro representa a opção mais cara, pois demanda uma considerável estrutura humana e de material. Já a segunda consiste no emprego de soluções de modelos matemáticos que regem esse problema, que é a transferência de calor transiente.

O melhor dos cenários, seria que o estudo da HAZ fosse feito através de uma única equação diferencial, da qual se pudesse obter o valor da temperatura em qualquer ponto da área de interesse (área que será tratada, neste cenário, como domínio). O resultado obtido ganharia o nome de solução analítica. Porém, devido à complexidade, é necessário o emprego de métodos numéricos para avaliar este domínio.

Esses métodos são técnicas pelas quais formula-se os problemas matemáticos, de forma que eles possam ser resolvidos utilizando-se operações lógicas e aritméticas (CHAPRA, 2013). Eles são extremamente poderosos na resolução de problemas, sendo capazes de lidar com um grande número de equações, não linearidades e geometrias complexas que muitas vezes não tem uma solução analítica.

Chapra e Canale (2016) explicam que o uso dos métodos numéricos teve um grande crescimento no fim da década 1940, com o desenvolvimento dos computadores digitais. Antes deles, a resolução dos métodos era entediante e demandava bastante tempo, o que limitava sua utilização prática. Como os computadores se sobressaem na execução de cálculos e nas décadas seguintes passaram a ser mostrar cada vez mais potentes e acessíveis, eles foram muito importantes no impulsionamento que os métodos numéricos tiveram, principalmente nas áreas da ciência e da engenharia.

Existem vários métodos numéricos. O escolhido para ser utilizado neste trabalho foi o método de volumes finitos. Este tem como uma de suas principais características a conservação da massa, momentum e energia. Sua aplicação começa com a divisão do domínio em pequenos volumes de controle, fazendo com que toda a sua extensão represente uma malha, com várias subdivisões.

Cada volume de controle teria sua própria equação de balanço da energia, que juntos formarão o sistema de equações do método. Sendo assim, a quantidade de equações é igual à quantidade de volumes de controle utilizados. Cada equação terá uma incógnita que representará a temperatura naquele ponto, que fisicamente, será tratada como a temperatura para toda a área do volume de controle. Isso faz com esse domínio seja classificado como discreto, diferente do domínio da equação diferencial que é contínuo.

O resultado obtido vai simbolizar a variação de temperatura no domínio, permitindo que se tenha dados para que seja feita uma avaliação dos efeitos do laser na HAZ. É importante perceber que o resultado real é encontrado pela equação diferencial. Porém, por diversas questões, nem sempre é possível utilizá-la. O uso de métodos numéricos é uma opção para obter resultados aproximados, e o parâmetro que avalia sua fidelidade é a diferença existente entre esses resultados. Tal diferença é tratada como erro, e dependendo da aplicação dos dados serão aceitos valores de erro maiores ou menores.

Uma forma de diminuir o erro é fazer um refino maior na malha. Define-se como refino a quantidade de volumes de controle existente no domínio. Quanto mais volumes forem calculados, mais fiéis à realidade serão os resultados obtidos. Essa configuração é chamada de malha fina e nela haverá mais equações e os cálculos demandarão mais esforço. Uma malha menos refinada, que é chamada de malha grossa, tem resultados mais fáceis de serem obtidos e tendem a ter um índice de erro maior.

Maliska (2017) explica que matematicamente, esse processo de aproximação começa com a substituição das derivadas da equação diferencial por valores discretos da função. Essa é a integração da função diferencial. Há diversas maneiras de fazê-la, e isso caracteriza o método numérico a ser utilizado. Alguns deles são o de diferenças finitas, elementos finitos e o método de volumes finitos, que será usado neste trabalho.

O método de volumes finitos obtém as equações aproximadas satisfazendo a conservação da propriedade dos volumes elementares (volumes de controle, citados anteriormente). Isso é feito realizando-se o balanço da temperatura (propriedade de interesse neste trabalho) nos volumes e integrando-os no espaço e no tempo.

Esse balanço entre os volumes de controle do domínio tem como um dos principais pilares o fluxo de energia entre eles. Para tal, há uma abordagem tradicional, o *Two Point Flux Approximation*, conhecido pela sigla TPFA. Chang, Sheng e Yuan (2019) explicam que nela, o fluxo normal que atravessa a borda de cada volume de controle é obtido a partir da diferença entre as duas incógnitas centradas nos volumes de controles vizinhos.

Esta abordagem tem como uma das principais vantagens o menor esforço computacional para a obtenção de um resultado. Porém, Rocha *et al* (2022) destacam que uma de suas limitações é a incapacidade de obter soluções convergentes quando o tensor da condutividade não está alinhado com a orientação do plano cartesiano. Chang, Sheng e Yuan (2019) destaca que essa condição é comum para as malhas distorcidas, que são muito úteis ou até as vezes inevitáveis na computação e engenharia, principalmente quando são geradas a partir de domínios físicos de geometria complexa.

Como opção ao TPFA, Klausen e Stephansen (2010) explanam que uma versão mais generalista dele, o MPFA, têm uma acurácia maior nos resultados, quando se trata de malhas irregulares ou não ortogonais. Essa sigla vem do inglês, o *Multi-Point Flux Approximation* e sua desvantagem em relação ao anterior é que ele é mais caro em termos de cálculos.

Diferente do TPFA, o MPFA considera mais de dois elementos na determinação de um fluxo. Aavatsmark (2007) exemplifica que em uma malha 2D, o fluxo em uma meia aresta entre volumes de controle carece de informações de 4 células distintas. Só depois que esse procedimento for concluído em 4 meias arestas que estão em torno de um vértice, é que se passa a fazer os mesmos cálculos para os demais vértices, até ser executado em todos os vértices do domínio.

Sobre a aplicação em malhas anisotrópicas, Ambrus (2012) destaca que o MPFA supera essa dificuldade por usar mais de dois pontos no cálculo do fluxo. Essa prática não é recente, e já costumava ser empregada em casos

específicos, como curvilíneas generalizadas, caso onde é comum o uso de um estêncil de 9 pontos.

O objetivo deste trabalho é resolver de forma robusta um problema de transferência de calor em meio anisotrópico, aplicado a um cenário das energias renováveis. Para tal, serão avaliados casos distintos de transferência de calor, que serão resolvidos através do método de volumes finitos, usando-se as abordagens TPFA e MPFA.

2. MODELO MATEMÁTICO

Um modelo matemático tem como objetivo representar a realidade de maneira menos complexa, possibilitando a análise do comportamento de sistemas enredados em situações que geralmente são difíceis de se observar na realidade. Ter entendimento sobre os aspectos gerais desenvolvidos neste trabalho é essencial para compreendê-lo plenamente. Neste tópico será discutida a transferência de calor, que é o fenômeno que motivou esta pesquisa e do qual deseja-se conhecer detalhes com todas as variáveis propostas.

O calor, por si só, define-se como a forma de energia que pode ser transferida de um sistema para outro em consequência da diferença de temperatura entre eles (ÇENGEL e GHAJAR, 2012). Essa diferença é vista como a força motriz de uma transferência de calor, sendo diretamente proporcional ao fluxo térmico que seria obtido. Essa dinâmica é a mesma para outras grandezas, como a corrente elétrica que tem como estímulo a diferença de tensão entre dois pontos e o escoamento de um fluido que tem como força motriz a pressão entre as extremidades consideradas. Tal transferência sempre ocorre na direção do sistema de menor temperatura, que receberá o calor.

Outra diferença entre temperatura e a transferência de calor é a natureza de cada uma. A primeira é uma grandeza escalar. Já a segunda é uma grandeza vetorial, e a sua representação deve ser complementada das informações de magnitude e direção. Uma classificação importante da transferência de calor se refere à variação de sua temperatura ao longo do tempo. Na permanente essa variação é nula. Situação oposta do transiente, onde a temperatura nos pontos do meio varia ao longo do tempo. Os problemas de regime permanente são mais fáceis de serem analisados e por isso é comum a adoção de considerações de regime permanente para analisar problemas transientes.

Em alguns estudos de transferência de calor, há a necessidade de se conhecer as temperaturas ao longo do meio. Esse resultado é chamado de distribuição de temperaturas, e sua motivação geralmente é o cálculo de alguns valores de interesse, como a taxa local de transferência de calor, a expansão térmica em pontos críticos, entre outros. Bergman e Lavine (2019) explanam que uma vez conhecida essa distribuição, o fluxo de calor por condução em qualquer ponto do meio ou na sua superfície pode ser determinado pela lei de *Fourrier*, que é mostrada na equação 1.

$$q'' = -k\nabla T \quad 1$$

Nela, o termo ∇ é o operador grad. Ele varia de acordo com o sistema de coordenadas que for utilizado. Tais sistemas são responsáveis pela especificação dos pontos no espaço, e sua presença é vital para a determinação de uma distribuição de temperaturas. Os sistemas existentes são de coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas e sua escolha se dá pelo mais adequado para determinada geometria, descrevendo melhor suas superfícies. Isso ocorre quando o sistema permite que cada superfície do objeto seja descrita com uma de suas coordenadas sendo constante.

Os outros termos da equação 1 são o q'' , que indica a taxa de condução do calor, o k que é a condutividade térmica e T , que é a temperatura. Uma classificação importante para os problemas de transferência de calor é sobre a quantidade de dimensões que são consideradas. Uma escolha bastante comum nos problemas de engenharia é a 2D, quando uma dimensão é considerada nula. Esse tipo de simplificação tem como objetivo diminuir o esforço computacional demandando na resolução dos problemas, direcionando os esforços para as dimensões onde as variações são mais relevantes.

Na equação 2 é apresentada a forma geral da equação de transferência de calor, em que o fluxo presente na equação de *Fourrier* foi substituído pela quantidade de calor. Nela, ρ é a massa específica do material, o C_p é seu calor específico, t é o tempo e Q é o termo fonte.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q \quad 2$$

Os tópicos a seguir vão detalhar algumas condições mais específicas para o uso dela.

2.1 CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

Para obter uma solução em um problema é preciso especificar algumas condições, de modo que a solução satisfaça todos eles. Çengel e Ghajar (2012) explicam que as condições mínimas necessárias são a inicial e de contorno. A primeira diz respeito aos parâmetros determinados no início do processo de transferência de calor. Já a segunda se refere às condições nas fronteiras do domínio, sendo pelo menos duas para cada dimensão considerada no estudo.

A presença de calor em um domínio pode ter duas explicações: Ou ele está sendo originado na própria malha ou adentra-o atravessando a fronteira. Nos dois casos, o calor representa um elemento novo no meio a ser avaliado, e a forma como ele surge interfere em como ele será trabalhado no desenvolvimento do método dos volumes finitos. No primeiro caso, sua inserção na equação de transferência é através do termo fonte, enquanto na segunda ele interfere nas condições de contorno.

A geração interna de energia térmica é resultado de reações químicas exotérmicas dentro dos limites da fronteira. Elas têm como princípio a dissipação de calor após sua conclusão e podem ter como objetivo a própria geração de calor ou esse ser um produto secundário da reação. Da primeira, pode-se citar como exemplo a corrente elétrica que passa em uma resistência de um chuveiro elétrico, que tem por objetivo gerar calor que irá aquecer a água. Já da segunda, pode-se mencionar um gerador elétrico de uma turbina eólica. Por mais que o objetivo seja a conversão de energia mecânica em elétrica, há dissipação de calor decorrente desse processo.

Já quando o calor entra ou sai no domínio atravessando a fronteira, seu fluxo deve ser considerado nas equações desses volumes limítrofes. Maliska (2017) explica que há três formas de se fazer essa consideração. A primeira prevê a criação de uma malha cujo o ponto central fique sobre a fronteira, gerando volumes de controle fora do tamanho padrão. A segunda prevê a criação de Volumes de controle no lado externo das fronteiras. Esses apresentam as características dessa região externa, e são chamados de volumes fictícios. O efeito colateral desse método é o aumento significativo no número de equações dos sistemas, que seria duplicado no caso de 2D e triplicado em uma abordagem 3D.

O terceiro método é o que apresenta resultados mais fiéis à realidade e por isso são os mais usados em problemas de engenharia e trata-se do balanço nos volumes de controle das fronteiras. Diferente dos anteriores, ele não se baseia na criação de novos volumes de controle. Os volumes internos seguirão sendo os últimos, mas agora receberão um fluxo térmico. Na equação dos volumes de controle, esse fluxo poderá ser reconhecido na forma de temperatura, fluxo ou entrada de calor por convecção.

Neste trabalho, as condições iniciais de contorno consideradas são:

$$\begin{aligned}
 T(\vec{x}, 0) &= T_0(\vec{x}) && \text{in } \Omega \\
 T(\vec{x}_{\Gamma_D}, t) &= g_D && \text{in } \Gamma_D \\
 -K_{\vec{x}} \vec{\nabla} T \cdot \vec{n}(\vec{x}_{\Gamma_N}, t) &= g_N && \text{in } \Gamma_N \\
 -K_{\vec{x}} \vec{\nabla} T \cdot \vec{n}(\vec{x}_{\Gamma_R}, t) &= h(T - T_{\infty}) && \text{in } \Gamma_R
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Onde $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$ e $\Gamma_D \cap \Gamma_N \cap \Gamma_R = \emptyset$. A condição inicial no domínio Ω é $T_0(\vec{x})$. O g_D representa os parâmetros conhecidos da fronteira de Dirichlet (que considera uma condição com a temperatura específica) e g_N os parâmetros da fronteira de Neumann (que considera um fluxo específico). Já a fronteira de Robin tem os parâmetros h e T_∞ que significam, respectivamente o coeficiente de transferência de calor e a temperatura do meio. Esta pode ser compreendida como uma combinação Dirichlet e Neumann. O \vec{n} é o vetor exterior a Γ .

2.2 CONDUTIVIDADE TÉRMICA

A condutividade térmica é medida pela capacidade do material de conduzir calor. Çengel e Ghajar (2012) explicam que, fisicamente, ela varia com a temperatura do material, mas utilizar um valor constante de uma temperatura média resulta em um resultado suficientemente preciso. Há também dois tipos de estruturas dos materiais que influenciam no valor de K : Isotropia e anisotropia. O primeiro se refere aos materiais que tem as mesmas propriedades em todas as direções, o que resulta na mesma condutividade térmica qualquer que seja a direção considerada. Esses representam a maior parte dos materiais considerados na engenharia.

Já para os materiais anisotrópicos a condutividade térmica varia de acordo com a direção que é considerada. São exemplos mais comuns de materiais com essa característica as fibras e os materiais compostos. Assim, para eles, é preciso expressar a condutividade térmica como a quantidade tensorial para considerar a variação da direção. Essa quantidade, por sua vez, é dada pelos tensores, que são entidades geométricas usadas para generalizar a noção de escalares, vetores e matrizes.

Eles são dimensionados pelo seu grau, representado por n , e o tamanho da sua matriz é dado pela relação 2^n . Um vetor é um tensor de grau 1, ou seja, uma matriz com dois elementos. Já um tensor bidimensional é uma matriz de grau 2, e conta com 4 elementos, conforme é demonstrado na equação 4. Nela, a notação sugere o uso de coordenadas cartesianas e cada um dos elementos indica a condutividade térmica em uma direção.

$$K = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{pmatrix}$$

4

Aavatsmark *et al* (1996) explicam que quando há elementos diferentes de zero fora da diagonal principal do tensor, as direções de K não estarão completamente alinhadas com as coordenadas adotadas no problema. Essa configuração ganha o nome de tensor diagonal. Já para representar um meio anisotrópico e não homogêneo o tensor deve ser completo, ou seja, deve ter todos os elementos diferentes de zero e ao menos um deles ser diferente dos demais.

3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

O tópico anterior apresentou a modelagem matemática para o problema de transferência de calor a ser avaliado nesse estudo, sendo a equação 2 o ponto inicial para o desenvolvimento desta fundamentação numérica. Mas antes, disso é necessário ter o entendimento do método a ser aplicado, e qual a sua importância neste processo.

Existem duas abordagens que têm como objetivo resolver as equações diferenciais que formam um modelo matemático: a abordagem analítica e a numérica. Maliska (2017) explica que o primeiro geralmente só é aplicável para geometrias e condições de contorno simples, além de contar que o problema tenha hipóteses simplificadores que o desviem demasiadamente do fenômeno real.

Uma vantagem bastante significativa da sua aplicação é o baixíssimo uso de recursos computacionais. Uma regra elementar para a resolução de problemas de engenharia é sempre optar pelo método mais adequado para o tamanho de problema. Portanto, caso um método analítico apresente uma solução na faixa de precisão e exigência necessárias, ele deve ser escolhido para a resolução. Mas mesmo para os problemas mais complexos, os métodos analíticos não devem ser completamente descartados. Eles são importantes porque auxiliam na validação dos resultados, contribuindo para o desenvolvimento de métodos numéricos mais robustos.

A necessidade do uso de um método numérico surge da dificuldade em se obter uma solução analítica a partir da equação do problema. Por isso, ela é considerada uma maneira alternativa de resolução. Maliska (2017) explica que eles praticamente não apresentam restrições, podendo resolver problemas com condições de contornos gerais e geometrias mais complexas. Quando uma solução numérica é comparada com a realidade de um problema físico, existem dois tipos de erros que podem ocorrer: Um de natureza matemático e outro de natureza física.

O primeiro é descoberto quando o resultado é comparado com outras soluções (sejam elas analíticas ou numéricas) e é avaliado se a equação diferencial foi resolvida corretamente. Este procedimento ganha o nome de validação numérica, e ele atesta a qualidade do método empregado. Já o segundo avalia a fidelidade entre o fenômeno físico real e o modelo matemático empregado. A coerência entre ambos tem o nome de validação física.

Há três métodos geralmente usados para a solução numérica de equações diferenciais: O Método de Diferenças Finitas, o Método de Elementos

Finitos e o Método de Volumes Finitos. Cada um deles tem características mais específicas, o que justifica sua aplicação em uma determinada seção de problemas. O de Diferenças Finitas costuma ser mais empregado na área de mecânica dos fluidos, cujo os escoamentos são altamente não lineares. Já o de Elementos Finitos usualmente é empregado em problemas de elasticidade. Esses não têm termos advectivos e podem ser comparados com termos puramente difusivos de transferência de calor.

Uma diferença importante entre esses dois e o terceiro, o Método de Volumes Finitos, é o princípio de trabalho. Os primeiros trabalham com pontos de malha, não havendo um caráter conservativo dos seus elementos. Já o Método de Volumes Finitos trabalha com volumes elementares, e em cada um é feito um balanço de conservação de uma propriedade, para que sejam obtidas as equações. Assim, segundo Maliska (2017), quando o problema demanda a satisfação dos princípios de conservação em nível discreto, o Método de Volumes Finitos se mostra mais adequado que os demais, como em um escoamento de fluidos.

Moukalled, Mangani e Darwish (2016) destacam que devido à essa característica de conservação, o método de volumes finitos é o mais usado nas aplicações em ferramentas de Dinâmica de Fluidos Computacionais (Do inglês, *Computational Fluid Dynamics*, ou apenas CFD). Essas ferramentas são largamente aplicadas em diversos ramos da indústria, como a aeronáutica, automotiva, química e de geração de energia. O método também tem se mostrado adequado para aplicações que envolvem fluxo de calor e transferência de massa.

Essa conservação de energia deve seguir alguns preceitos básicos: o fluxo que entrar em um determinado volume deve ser idêntico ao que sai do volume adjacente, os volumes finitos não devem se sobrepor e a soma das áreas de todos os volumes deve ser igual à área inicial do domínio.

Outra característica relevante do método é sua capacidade de adaptar-se ao problema proposto, podendo lidar com vários cenários físicos e aplicações mais complexas. Duas características auxiliam nesse processo: A primeira é que ele pode ser formulado em malhas poligonais não estruturadas, e a segunda é a possibilidade de se implementar uma grande variação nas condições de contorno sem grandes complicações, tendo em vista que as variáveis desconhecidas são avaliadas nos centroides dos elementos do volume, e não nas faces limite.

3.1 O PROCESSO DE DISCRETIZAÇÃO

A solução aproximada da equação de temperatura, segundo o Método de Volumes Finitos, é obtida a partir da forma integral da equação 2, ao longo de todo o domínio Ω e do tempo t , conforme é mostrado na equação 5.

$$\int_{t_0}^t \int_{\Omega} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega dt = \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (k \nabla T) d\Omega dt + \int Q d\Omega dt \quad 5$$

Na equação 6 admite-se que a integral do domínio é equivalente ao somatório das integrais dos volumes de controle, além de colocar o conteúdo do segundo termo para o primeiro, igualando a equação a zero. Nela, o NVC é a quantidade de volumes de controle, o V é um volume de controle, e o Ω_V é seu domínio.

$$\sum_{V=1}^{NVC} \left(\int_{t_0}^t \int_{\Omega_V} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega dt - \int_{\Omega_V} \vec{\nabla} \cdot (k \nabla T) d\Omega dt - \int Q d\Omega dt \right) = 0 \quad 6$$

Integrando-se no tempo a equação de um volume de controle, tem-se a equação 7. Nela, o Δt é o passo de tempo, o T_V^t indica a temperatura no volume de controle no instante de tempo anterior e o $T_V^{t+\Delta t}$ é a temperatura do mesmo volume após o passo.

$$\int_{\Omega_V} [\rho C_p (T_V^{t+\Delta t} - T_V^t) d\Omega_V] - \int_{\Omega_V} [\vec{\nabla} \cdot (k \nabla T) d\Omega_V] - \int Q d\Omega_V \Delta t = 0 \quad 7$$

Para que a equação de transferência de calor dos volumes de controle possa ser usada na fronteira, será necessário o uso do teorema da divergência. Ele se fundamenta no caráter conservativo do método de volumes finitos e tem sua forma genérica apresentada na equação 8, que iguala a integral no domínio

com a integral do contorno, representado por Γ . Nela, o F é o fluxo térmico e n é o versor, que é um vetor com módulo unitário. Ele é normal à cada face dos volumes de controles dessa região, representando sua orientação.

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{F} n d\Gamma \quad 8$$

O fluxo térmico também está presente na lei de *Fourrier*, que foi apresentada na equação 1. Substituindo o fluxo da equação 1 na equação 8, e considerando-se agora a integral referente a cada volume de controle, tem-se a equação 9. Nela, o Γ_v indica todo o contorno no volume v .

$$\int_{\Omega_v} \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) d\Omega_v = \int_{\Gamma_v} (k \vec{\nabla} T) n d\Gamma_v \quad 9$$

A equação 7 pode ser dividida em dois termos de natureza distintas. A primeira integral é o termo temporal da equação, enquanto a segunda é o termo espacial. Devido a essa relação de igualdade, apresentada na equação 9, pode-se substituir o termo espacial da equação 7 pela integral dos volumes no contorno, resultando na equação 10.

$$\int_{\Omega_v} [\rho C_p (T_v^{t+\Delta t} - T_v^t) d\Omega_v] - \left[\int_{\Gamma_v} (k \vec{\nabla} T) \vec{n} d\Gamma_v \right] \Delta t - \int_{\Omega_v} Q d\Omega dt = 0 \quad 10$$

Integrando-se a equação 10 em relação ao espaço, tem-se a equação 11. Novamente, a integral do espaço é aproximada para o somatório de seus elementos internos, mas desta vez o procedimento foi feito a integral da região de contorno. Nessa etapa também é necessário delimitar a dimensão da equação, que neste caso será 2D.

A primeira implicação será no volume dos elementos, que aparece na equação com o termo V_{Ω_v} . Por ser 2D, ela será a área do volume de controle. Ainda devido a essa consideração, a face de um volume de controle se

apresenta apenas como uma linha. E como qualquer linha, sua representação necessita apenas de dois pontos, sendo simbolizado pelos termos i e j na equação 11. Nela também aparece a figura do \bar{Q} , que é a média do termo fonte, que se difere do Q , por essa ser uma função que varia de ponto a ponto.

$$\rho C_p (T_v^{t+\Delta t} - T_v^t) V_{\Omega_v} - \left(\sum_{ij \in \Gamma_v} \int_{\Gamma_{vij}} k \bar{\nabla} T \vec{n} d\Gamma_{vij} \right) \Delta t - \bar{Q} V_{\Omega_v} \Delta t = 0 \quad 11$$

Integrando-se o termo espacial, chega-se à equação 12. O produto entre o versor \vec{n} e a face Γ_{vij} resulta no vetor área \vec{N}_{ij} , que é normal à face e tem o tamanho de sua área.

$$\rho C_p (T_v^{t+\Delta t} - T_v^t) V_{\Omega_v} - \left(\sum_{ij \in \Gamma_v} k \bar{\nabla} T \vec{N}_{ij} \right) \Delta t - \bar{Q} V_{\Omega_v} \Delta t = 0 \quad 12$$

Nesta discretização, o sistema de coordenadas escolhido será o de coordenadas cartesianas. Portanto, a relação do operador grad (que foi apresentado na modelagem matemática) com a temperatura será dada pela equação 13.

$$\bar{\nabla} T = k \left(\frac{\delta T}{\delta x} + \frac{\delta T}{\delta y} \right) \quad 13$$

Juntando-se a equação 12 e 13, tem-se a equação final desse modelo genérico de discretização, na equação 14.

$$\rho C_p (T_v^{t+\Delta t} - T_v^t) V_{\Omega_v} - \left(\sum_{ij \in \Gamma_v} \left[k \left(\frac{\delta T}{\delta x} + \frac{\delta T}{\delta y} \right) \vec{N}_{ij} \right] \right) \Delta t - \bar{Q} V_{\Omega_v} \Delta t = 0 \quad 14$$

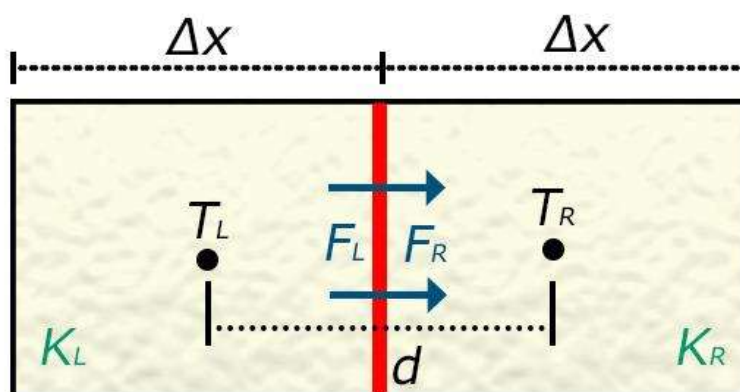
A solução numérica dá origem a um parâmetro importante, que dimensiona a diferença do resultado obtido por ela com o encontrado pela solução analítica (e exata). Esse parâmetro chama-se erro de truncamento. Como a solução numérica advém de um domínio discreto, sua aproximação para um domínio contínuo nunca ocorrerá com um erro rigorosamente zero. É usual delimitar um valor de erro muito pequeno para que ele seja considerado aceitável, e a solução seja validada.

Nos tópicos seguintes serão dados direcionamentos para duas estratégias que solucionam a equação discretizada. Ambos se baseiam no Método de Volumes Finitos *cell-centered* discutido em Maliska (2017).

3.2 TPFA

O TPFA é a abordagem mais tradicional para se resolver problemas de métodos de volumes finitos. Sua sigla vem do inglês, *Two Points Fluxes Approximation*, e seu objetivo é calcular a temperatura em dois volumes de controle que sejam separados por uma única face. O princípio da conservação de energia é empregado na consideração de que todo o fluxo que sai de um volume de controle, atravessa a face e entra no outro, conforme é ilustrado na Figura 1.

Figura 1 - Representação do TPFA



Fonte: Autor (2023)

Do ponto de vista matemático, a participação de apenas dois volumes deixa o sistema mais simples, pois cada fluxo só depende das temperaturas dos elementos envolvidos. A equação 15 mostra o fluxo que passa na face central, saindo do volume L. Já a equação 16 mostra o fluxo que também passa na face, mas entrando no volume R. Nelas, F é o fluxo térmico e Δx é a distância entre o centro do volume de controle e sua face.

$$F_L = -K \frac{T_L - T_R}{\Delta x} \quad 15$$

$$F_R = -K \frac{T_R - T_L}{\Delta x} \quad 16$$

Como o fluxo é conservado, ambas podem ser igualadas, conforme é mostrado na equação 17.

$$-K_L \frac{T_L - T_R}{\Delta x} = -K_R \frac{T_R - T_L}{\Delta x} \quad 17$$

A condutividade térmica de calor é relativa a cada volume de controle e para a resolução do TPFa ela não pode ser um tensor completo. Isso se dá porque esse método só faz a leitura cartesiana dos volumes de controle e para que ele funcione de maneira satisfatória, as direções principais do tensor devem estar alinhadas com as direções principais do plano cartesiano. A equação 18 indica que não há projeções de x em y e nem de y ou x. Assim, os elementos k_{xy} e k_{yx} são nulos, transformando a condutividade em um tensor identidade, que é equivalente a um vetor.

$$K = \begin{pmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{pmatrix} \quad 18$$

Em um problema habitual, a equação 17 teria duas incógnitas: T_L e T_R . Para resolvê-la, deve ser atribuída uma temperatura a uma delas. Isso é feito aplicando-se as condições iniciais e de contorno. Assim, seria possível resolver as equações de TPFA ao longo de todo o domínio. O erro encontrado seria avaliado e as equações seriam refeitas até o que ele atingisse o valor esperado ou que o tempo máximo fosse alcançado. Só então a solução seria aceita e seria possível construir a distribuição de temperaturas do problema

Eigestad *et al* (2002) destacam que a dependência do TPFA em apenas dois volumes o torna inadequado para o uso em malhas distorcidas e quando há a permeabilidade total do tensor. A consequência disso é a necessidade de se obter um completo alinhamento entre o plano cartesiano e o domínio. Mesmo assim, esse método é muito empregado em softwares comerciais. Souza (2015) destaca que ele é tradicionalmente empregado em simuladores comerciais usados na indústria do petróleo. Apesar da sua aplicação ter limitações, ela é suficiente, para a resolução de uma série de problemas.

A aplicação do TPFA na equação 14, resulta na equação 19. Nele, a distância entre os dois pontos considerados é simbolizada pela letra d , que também foi demonstrada na Figura 1.

$$\rho C_p (T_L^{t+\Delta t} - T_R^t) V_L - \left(\sum_{ij \in \Gamma_v} k_{ij} \frac{T_R^{t+\Delta t} - T_L^{t+\Delta t}}{\|\vec{d}\|} \|\vec{N}_{ij}\| \right) \Delta t = 0 \quad 19$$

O TPFA é uma técnica mais simples de se avaliar um fluxo. Porém, ela não tem uma boa acurácia e solução eficiente quando considera uma malha não ortogonal. Chen *et al* (2008) destacam que nesses casos o MPFA, estratégia a ser abordada no próximo tópico, geralmente possui resultados melhores, sendo convergentes e apresentando monotonicidade.

3.3 MPFA

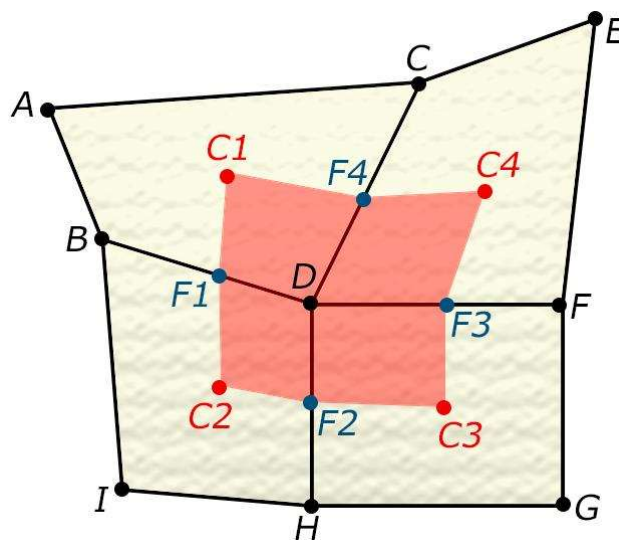
Uma estratégia alternativa para a resolução de problemas de métodos de volumes finitos é o *Multi-flux Approximation*, que tem como sigla o MPFA. Klausen

e Stephanson (2010) explicam que os esquemas numéricos do MPFA são uma generalização do TPFA e, por isso, preservam algumas de suas características. A principal diferença entre ambos é a maior quantidade de pontos demandadas pelo MPFA na sua aplicação.

Zhang e Kobiasi (2017) destacam que essa diferença depende da malha que está sendo trabalhada. No seu estudo, considerando uma mesma região com malha 2D quadrilateral estruturada, enquanto o TPFA envolveu 5 pontos, o MPFA considerou 9. Para uma região triangular, enquanto o TPFA necessitou de apenas 4 pontos, o MPFA demandou a presença de 13. Souza (2015) destaca que essa quantidade maior de pontos diminui os efeitos de orientação da malha, melhorando a acurácia da solução. E isso independe da orientação dos tensores, podendo ser até diagonais ou completos. Isso se dá por causa da aproximação do fluxo em cada superfície de controle. Como a representação considera mais de dois pontos, a difusão cruzada é considerada de forma mais adequada.

A variação na estrutura das malhas (inclusive com a presença de malhas não estruturadas) é adotada devido à busca pela melhor adaptação da malha ao seu domínio. Um exemplo é destacado em Ambrus (2012), que aborda um estudo de simulação dos reservatórios de petróleo e declara que o uso de malhas não estruturadas é a solução que melhor representa o domínio nesses casos. Gao, Yi e Zheng (2021) destacam que esse mesmo cenário, de simulação na indústria petrolífera, motivou a primeira aplicação do MPFA.

Figura 2 - Região de interação em uma malha quadrangular



Fonte: Autor (2023)

A formulação mais tradicional do MPFA se chama MPFA-O, que se caracteriza por utilizar uma aproximação linear com suporte triangular (SOUZA, 2015). O primeiro passo para sua aplicação é a definição de uma região de interação. Aavatsmark *et al* (1996) explicam que essa região é definida pela combinação linear das células adjacentes em torno de um vértice. Sua delimitação são as linhas que passam pelos centroides das células e os pontos médios de suas faces. A Figura 2 ilustra a região de interação de uma malha quadrangular, que é destacada pela coloração vermelha.

Na Figura 2, os pontos C1, C2, C3 e C4 representam os centroides dos volumes de controle e são chamados de pontos de colocação. Já os pontos F1, F2, F3 e F4 representam os pontos médios de cada face e são chamados de pontos auxiliares. Os pontos de A até I são os vértices dos volumes de controle considerados, sendo D o único comum aos quatro. As linhas entre o D e o F1, F2, F3 e F4 são chamadas de meias faces. A quantidade de pontos de colocação da região de interação da Figura 2 é dada por \mathcal{N}_{PC}^D . Já a quantidade de meias faces é dada por \mathcal{N}_{MF}^D .

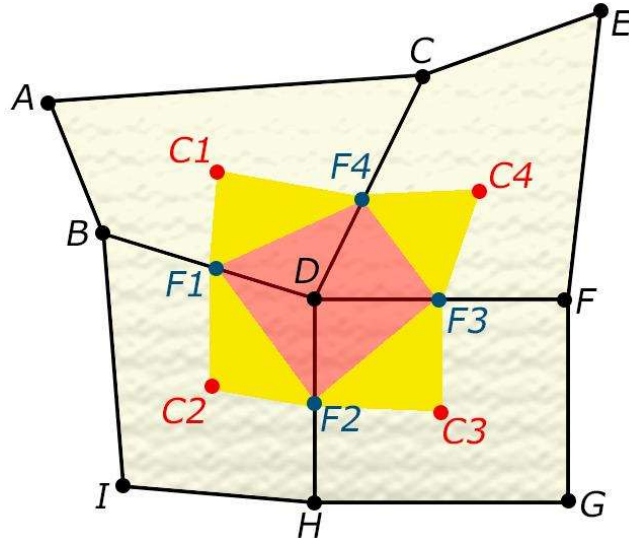
A taxa de energia que atravessa cada meia face é calculada em função de um ponto de colocação. E para cada fronteira, serão calculadas duas taxas. Por exemplo, na fronteira DF_1 a taxa de energia calculada em função de C_1 é dada pela equação 20.

$$F_{DF_1}^{C_1} = \vec{q}_{DF_1}^{C_1} \cdot \vec{N}_{DF_1} = -K_{C_1} \vec{\nabla} T_{C_1, F_1, F_4} \cdot \vec{N}_{DF_1} \quad 20$$

No MPFA-O a aproximação das taxas de energia está ligada a uma outra camada que é sobreposta à região de interação, chamada de área de suporte triangular. Essas são triângulos formados por um ponto de colocação e dois pontos auxiliares, conforme é mostrado na Figura 3. Nela são apresentadas 4 áreas de suporte. O termo $\vec{\nabla} T_{C_1, F_1, F_4}$ que aparece na equação 20 é o gradiente de temperatura em um dos triângulos de suporte. Seu cálculo é demonstrado na equação 21.

Na equação 21, o $\Omega_{C_1 F_1 F_4}$ é a área do triângulo, quando é considerado um problema em 2D ou volume, no caso de um problema 3D. Os demais termos indicam a temperatura no ponto considerado (T) e os vetores normais às faces do triângulo, e têm a mesma dimensão (N).

Figura 3 - Área de suporte triangular



Fonte: Autor (2023)

$$\nabla T_{C_1 F_1 F_4} = -\frac{1}{2\Omega_{C_1 F_1 F_4}} (T_{F_1} N_{C_1 F_4} + T_{C_1} N_{F_4 F_1} + T_{F_4} N_{F_1 C_1}) \quad 21$$

Substituindo-se o gradiente de temperatura detalhado na equação 21 na equação da vazão em cada meia face (equação 20), obtém-se a equação 22.

$$F_{DF_1}^{C_1} = \frac{K_{C_1} (T_{F_1} N_{C_1 F_4} + T_{C_1} N_{F_4 F_1} + T_{F_4} N_{F_1 C_1}) \vec{N}_{DF_1}}{2\Omega_{C_1 F_1 F_4}} \quad 22$$

Há dois caminhos distintos entre a consideração das áreas de suporte e a formulação da equação 20. Neste trabalho foi considerada a abordagem que usa o Teorema da Divergência como base para discretizar o gradiente de pressão, que é discutido em Aavatsmark et al (1998). Mais detalhes dela e de uma estratégia alternativa serão apresentados no Anexo A.

Todas as meias faces presentes na região de interação da Figura 2 associada ao vértice D tem suas vazões calculadas por equações semelhantes

à equação 21 Uma forma alternativa de representá-las é a matricial. A equação 23 compila elas.

$$\begin{pmatrix} F_{DF_1}^{C_1} \\ F_{DF_2}^{C_2} \\ F_{DF_3}^{C_3} \\ F_{DF_4}^{C_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{F_1} \\ T_{F_2} \\ T_{F_3} \\ T_{F_4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & B_8 \\ B_2 & B_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & B_6 & B_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{C_1} \\ T_{C_2} \\ T_{C_3} \\ T_{C_4} \end{pmatrix} \quad 23$$

Os coeficientes A e B são parâmetros físicos de interesse, que serão detalhados no compilado de equações 24.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{K_{C_1} (\vec{N}_{F_1 F_4}) \cdot \vec{N}_{DF_1}}{2\Omega_{C_1 F_4 F_1}}; & A_2 &= \frac{K_{C_2} (\vec{N}_{F_2 F_1}) \cdot \vec{N}_{DF_2}}{2\Omega_{C_2 F_1 F_2}}; \\ A_3 &= \frac{K_{C_3} (\vec{N}_{F_3 F_2}) \cdot \vec{N}_{DF_3}}{2\Omega_{C_3 F_2 F_3}}; & A_4 &= \frac{K_{C_4} (\vec{N}_{F_4 F_3}) \cdot \vec{N}_{DF_4}}{2\Omega_{C_4 F_3 F_4}}; \\ B_1 &= \frac{K_{C_1} (\vec{N}_{C_1 F_4}) \cdot \vec{N}_{DF_1}}{2\Omega_{C_1 F_1 F_4}}; & B_2 &= \frac{K_{C_1} (\vec{N}_{C_1 F_1}) \cdot \vec{N}_{DF_1}}{2\Omega_{C_1 F_1 F_4}}; \\ B_3 &= \frac{K_{C_2} (\vec{N}_{C_2 F_1}) \cdot \vec{N}_{DF_2}}{2\Omega_{C_2 F_1 F_2}}; & B_4 &= \frac{K_{C_2} (\vec{N}_{C_2 F_2}) \cdot \vec{N}_{DF_2}}{2\Omega_{C_2 F_1 F_2}}; \\ B_5 &= \frac{K_{C_3} (\vec{N}_{C_3 F_2}) \cdot \vec{N}_{DF_3}}{2\Omega_{C_3 F_2 F_3}}; & B_6 &= \frac{K_{C_3} (\vec{N}_{C_3 F_3}) \cdot \vec{N}_{DF_3}}{2\Omega_{C_3 F_2 F_3}}; \\ B_7 &= \frac{K_{C_4} (\vec{N}_{C_4 F_3}) \cdot \vec{N}_{DF_4}}{2\Omega_{C_4 F_3 F_4}}; & B_8 &= \frac{K_{C_4} (\vec{N}_{C_4 F_4}) \cdot \vec{N}_{DF_4}}{2\Omega_{C_4 F_3 F_4}} \end{aligned} \quad 24$$

As aproximações de taxas de energia podem ser divididas em dois grupos: Quando a meia face está à esquerda do ponto de colocação do triângulo de suporte ou quando ela está à direita. As equações presentes na matriz da equação 23 representam apenas as aproximações da esquerda. As equações 25 e 26 demonstram a versão compacta das aproximações da esquerda e da direita.

$$\mathbf{f}_{esquerda} = \left\{ F_{DF_1}^{C_1} \quad F_{DF_2}^{C_2} \quad F_{DF_3}^{C_3} \quad F_{DF_4}^{C_4} \right\}^T \quad 25$$

$$\mathbf{f}_{direita} = \left\{ F_{DF_4}^{C_1} \quad F_{DF_3}^{C_4} \quad F_{DF_2}^{C_3} \quad F_{DF_1}^{C_2} \right\}^T \quad 26$$

Nas equações 27 e 28, ambas são divididas em parâmetros para a temperatura dos pontos de colocação (\mathbf{T}_c) e dos pontos auxiliares (\mathbf{T}_a). Considera-se os coeficientes C e D como os parâmetros físicos e geométricos para as aproximações das taxas de energia das equações da direita, seguindo o mesmo modelo de A e B , que fazem esse papel para as equações da esquerda.

$$\mathbf{f}_{esquerda} = \mathbf{T}_c A + \mathbf{T}_a B \quad 27$$

$$\mathbf{f}_{direita} = \mathbf{T}_c C + \mathbf{T}_a D \quad 28$$

Considerando-se a continuidade em todas as meias faces da região de interação avaliada, tem-se que as duas taxas se anulam, sendo portanto, iguais. Assim, também pode-se igualar seus termos, conforme é demonstrado na equação 29.

$$\mathbf{T}_c A + \mathbf{T}_a B = \mathbf{T}_c C + \mathbf{T}_a D \quad 29$$

Na sequência, pode-se isolar \mathbf{T}_a , colocando-o em função dos demais termos, conforme é mostrado na equação 30.

$$\mathbf{T}_a = \frac{\mathbf{T}_c (C - A)}{(B - D)} \quad 30$$

Substituindo a equação 30 nas equações 27 e 28, tem-se as aproximações de taxa de energia em função apenas da temperatura nos pontos de colocação, conforme é visto nas equações 31 e 32.

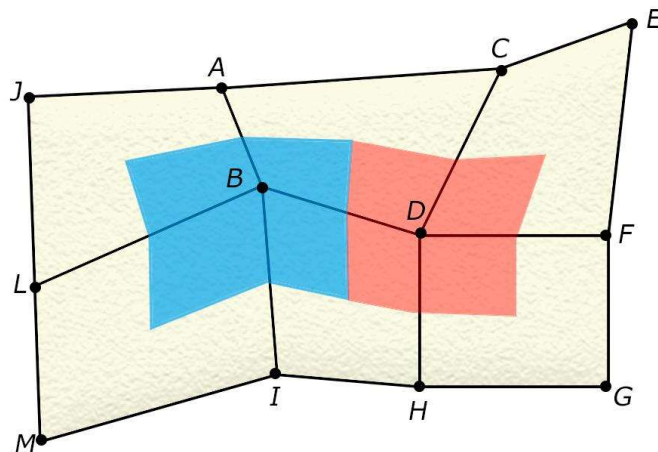
$$\mathbf{f}_{esquerda} = \mathbf{T}_c((A + B(C - A)(B - D)^{-1}) = \mathbf{T}_c X_{ESQ} \quad 31$$

$$\mathbf{f}_{direita} = \mathbf{T}_c((C + D(C - A)(B - D)^{-1}) = \mathbf{T}_c X_{DIR} \quad 32$$

Os termos X_{ESQ} e X_{DIR} podem ser interpretados como matrizes de transmissibilidade. O último passo é a representação da matriz de transmissibilidade global, que é representado pela equação 33. Nela, T_G representa as temperaturas nos pontos de colocação dos volumes de controle, u_G é o “carregamento” global do sistema e o M_G é a matriz de transmissibilidade global.

$$M_G T_G = u_G \quad 33$$

Figura 4 - Representação de duas regiões de interação



Fonte: Autor (2023)

Na matriz de transmissibilidade global, cada linha representa as contribuições de um volume de controle presente no domínio, que são obtidas a partir das matrizes de transmissibilidade, que são obtidas de cada região de

interação. A Figura 4 ilustra a relação entre duas regiões de interação em uma malha. É importante considerar que elas não se sobrepõem e que cada nó entre os volumes de controle tem sua própria região de interação.

Em resumo, o método de MPFA-O demonstrado neste tópico expôs que há três camadas que sobrepõem o domínio. A primeira é a divisão em volumes finitos, que fundamenta a demarcação das seguintes. A segunda é a de regiões de interação, que define o objeto de estudo que se deseja obter, a vazão nas meias faces em torno de um vértice, além da equação associada com essa grandeza. A terceira são as áreas de suporte, que é construída a partir de informações das duas anteriores e é fundamental para o cálculo da taxa de energia nas meias faces.

A atividade presente no domínio tem sua mensuração aproximada a partir dessas camadas, sendo o objetivo final a obtenção de uma matriz global, que vai apresentar todas as informações sobre todos os volumes de controle, apresentando um panorama geral do domínio.

4. APLICAÇÕES E RESULTADOS

Neste trabalho, serão apresentados dois casos com características distintas que serão resolvidos usando o TPFA e o MPFA. O primeiro será um *benchmark*, no qual será possível obter uma solução analítica e outra numérica, em que a convergência entre ambas será avaliada. O problema pode ser considerado um teste clássico, e avalia a condução de calor transiente e não linear em um material anisotrópico e homogêneo. Ele será a referência para a análise do segundo, que tem um nível de complexidade maior.

O segundo caso representará um problema com características reais e contará apenas a solução numérica. Ele envolve a condução de calor de calor transiente e não linear em uma pá de turbina eólica anisotrópica devido ao processo de corte a laser. A investigação consistirá na avaliação do desempenho da formulação numérica em simular corretamente a condução de calor transiente em geometrias mais complexas, caracterizado por uma não linearidade física.

4.1 CASO 1

Este terá como fenômeno uma transferência de calor transiente e não linear, via condução, em um material anisotrópico e homogêneo. É uma adaptação do que foi apresentado em Yao *et al* (2014). A solução analítica advém da relação apresentada na equação 34. Esse é o resultado de referência, ao qual o resultado numérico buscará se aproximar. O nível de aproximação obtido será tratado nesse trabalho como convergência.

$$T(x, y, t) = e^{-t} \cos(x + y) \quad 34$$

A diferença do resultado analítico para o numérico, também conhecido como erro, é obtido através da equação 35, que é a representação da norma L2 para esse problema. Nele, as temperaturas dos centroides dos volumes de

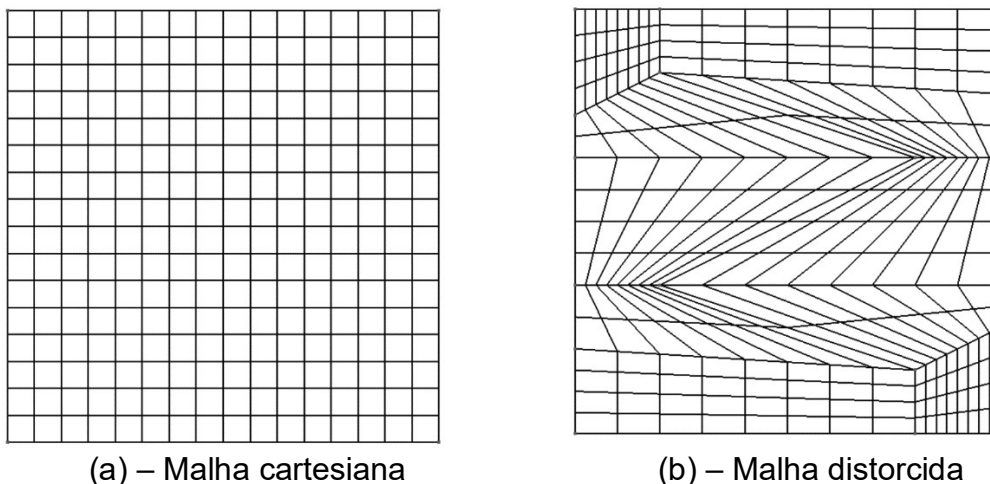
controle são dadas por duas variáveis, nas quais a $T_i(\vec{x}_i)$ é o valor preciso e o \bar{T}_i são os valores aproximados.

$$E = \sqrt{\frac{\sum_{i \in M} [\Omega_i (T_i(\vec{x}_i) - \bar{T}_i)^2]}{\sum_{i \in M} [\Omega_i]}} \quad 35$$

A condutividade térmica é dada por um tensor diagonal anisotrópico onde o componente transversal é $k_{xx} = 10 \text{ W / m}^\circ\text{C}$ e o longitudinal é $k_{yy} = 1 \text{ W / m}^\circ\text{C}$. Serão usadas duas malhas, sendo uma regular e alinhada com o plano cartesiano - Figura 5 (a) - e outra distorcida - Figura 5 (b). Nas simulações, serão considerados diferentes refinamentos, que serão de 8, 16, 32, 64 e 128 subdivisões. Outra variação é no passo de tempo. O Δt assume os valores de 0,001 s, 0,01 s, 0,1 s e 1 s.

A presença destas variáveis se dá por causa da natureza transiente do problema, e possibilita a análise de como cada método atinge a convergência de forma individual, tendo como variáveis o refinamento e o passo de tempo. Já as condições de contorno estarão inalteradas em todos os exemplos, sendo consideradas as condições de Dirichelet em todas as faces.

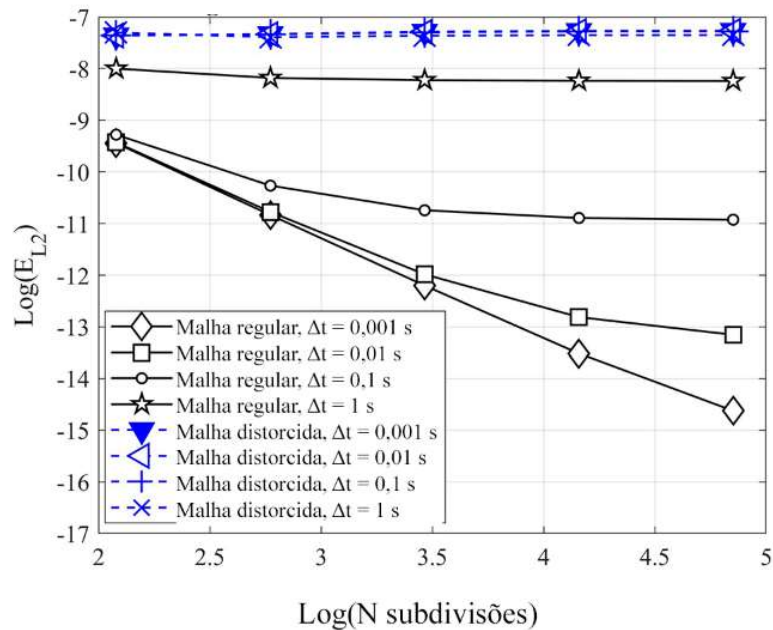
Figura 5 - Malhas utilizadas na simulação do Caso 1



Fonte: Autor (2023)

A Figura 6 apresenta o resultado da primeira simulação, que considerou as duas malhas usando-se a estratégia do TPFA. Nele, é percebido que não houve nenhum movimento de convergência mais relevante para a malha cartesiana com $\Delta t = 1s$ e nem para as simulações com a malha distorcida. Para as demais simulações, quanto menor o passo de tempo, maior foi a convergência observada.

Figura 6 - Taxa de convergência do TPFA para o Caso 1



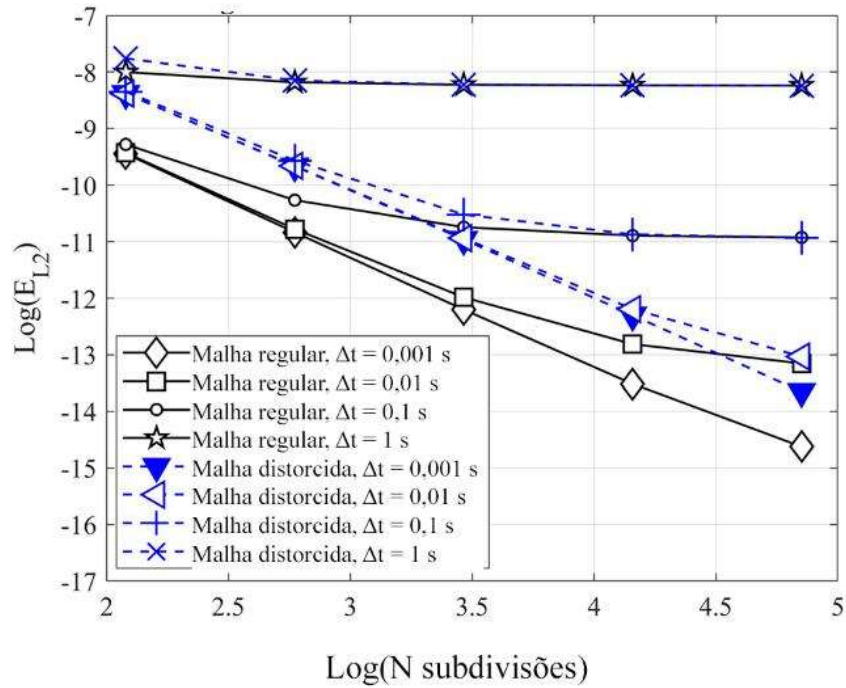
Fonte: Autor (2023)

Aavatsmark (2002) explica que quando as direções principais do tensor de condutividade térmica estão alinhados com a orientação da malha, que é k-ortogonal, o método TPFA tem a tendência de apresentar uma maior convergência. Isso é demonstrado nos exemplos da malha cartesiana, sendo uma percepção adicional a de que quanto menor o passo, mais acentuada é a convergência.

Já a Figura 7 apresenta o resultado para as mesmas malhas usando a estratégia do MPFA. Nele, em oposição ao anterior, houveram resultados da malha distorcida com algum movimento relevante de convergência. Chen *et al* (2008) explica que as aproximações de MPFA podem ser empregadas em malhas poligonais quaisquer, inclusive nas que não tiverem uma malha k-ortogonal. Souza (2015) destaca que o estêncil de nove pontos (usado em malhas estruturadas quadrilaterais em domínios bidimensionais, como a malha

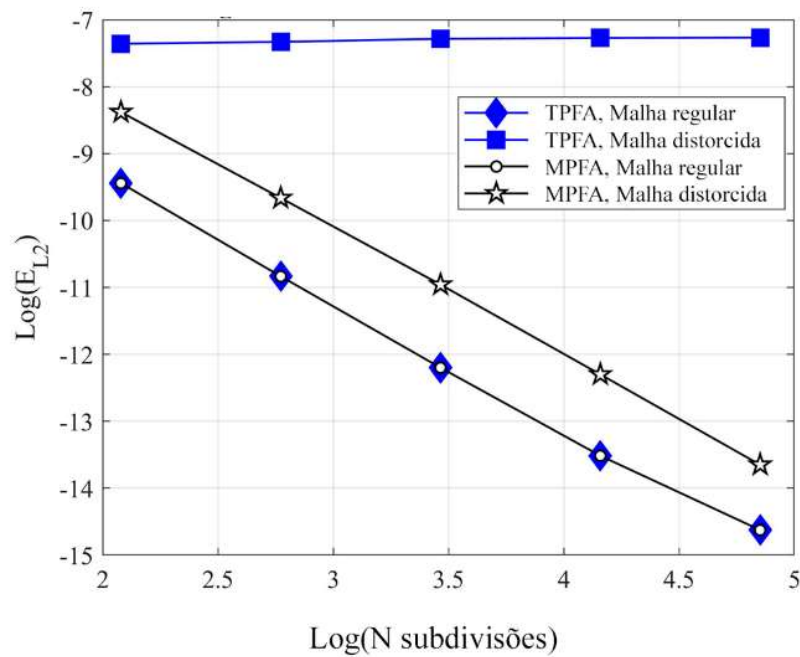
cartesiana deste caso) diminui os efeitos de orientação da malha e melhoram a acurácia da solução. A exemplo do obtido no caso anterior, a convergência é diretamente proporcional à diminuição do passo.

Figura 7 - Taxa de convergência do MPFA para o Caso 1



Fonte: Autor (2023)

Figura 8 - Taxa de convergência para os dois métodos com $\Delta t = 0,001$ s



Fonte: Autor (2023)

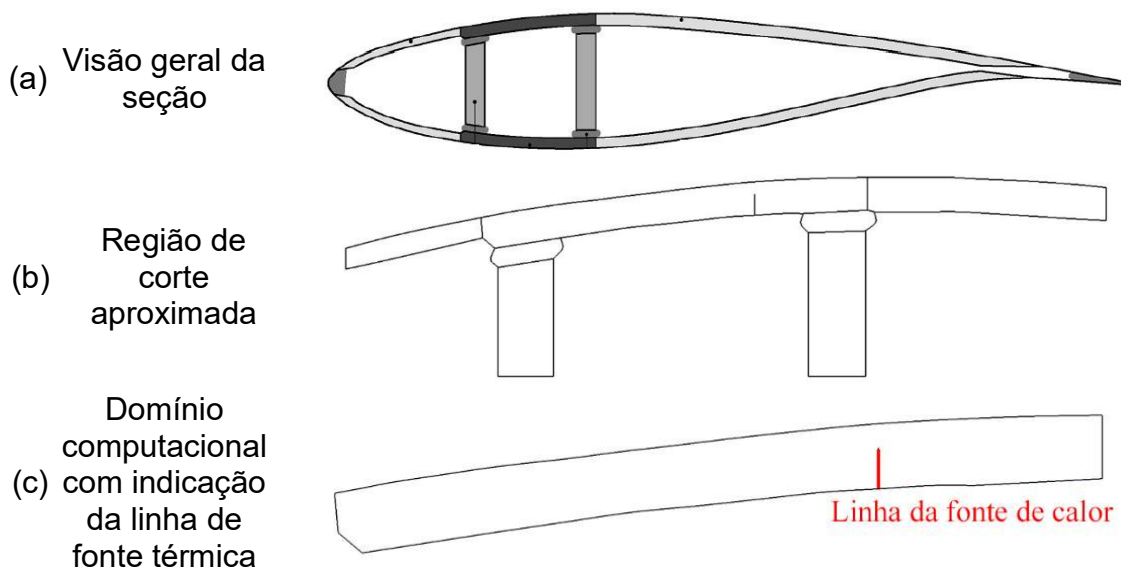
Nas duas simulações, chama a atenção a relação entre as convergências obtidas para o TPFA e MPFA na resolução da malha para um $\Delta t = 0,001s$. A Figura 8 representa as duas simulações no mesmo gráfico. Para a malha cartesiana as duas curvas de convergência se sobrepõem, mostrando uma acurácia semelhante dos dois métodos para uma grade regular. Isso demonstra que apesar do MPFA ser mais desenvolvido, para esse caso o TPFA é suficiente para a aproximação.

Já quando é considerada a grade distorcida, o TPFA não apresenta qualquer convergência, diferente do MPFA, que converge. Isso deixa clara a necessidade que um material anisotrópico usado de base para uma malha não ortogonal tem por um processo de discretização das suas equações.

4.2 CASO 2

No caso anterior, o material de estudo foi um *benchmark* para validação da formulação numérica proposta. Já neste problema, o objetivo é simular o comportamento do modelo matemático em um caso real teórico com a geometria e o material mais complexos. A geometria escolhida foi uma lâmina de uma pá de aerogerador. Elas são compostas por camadas de fibras de carbono ou vidro e matrizes de polímeros termofixos. (LEON, 2023).

Figura 9 - Pá da turbina considerada na simulação do Caso 2



Fonte: Autor (2023)

Este estudo tem como meio para atingir o objetivo final o conhecimento da distribuição de temperaturas do domínio ao longo do processo de cauterização da pá, que será motivada pela aplicação de um laser na sua estrutura. Meng *et al* (2020) afirmam que essa distribuição ocorre de forma irregular devido à anisotropia da estrutura, que é natural devido à sua disposição. Ela depende, mais especificamente, da orientação das fibras.

As dimensões da pá e as propriedades do material foram obtidas de LM Glasfiber (2009) e sua geometria foi obtida após uma adaptação de Joustra *et al* (2021). A Figura 9 mostra uma seção pá eólica de perfil, com destaque para a região que pode ser termicamente afetada pelo procedimento de corte usando um laser.

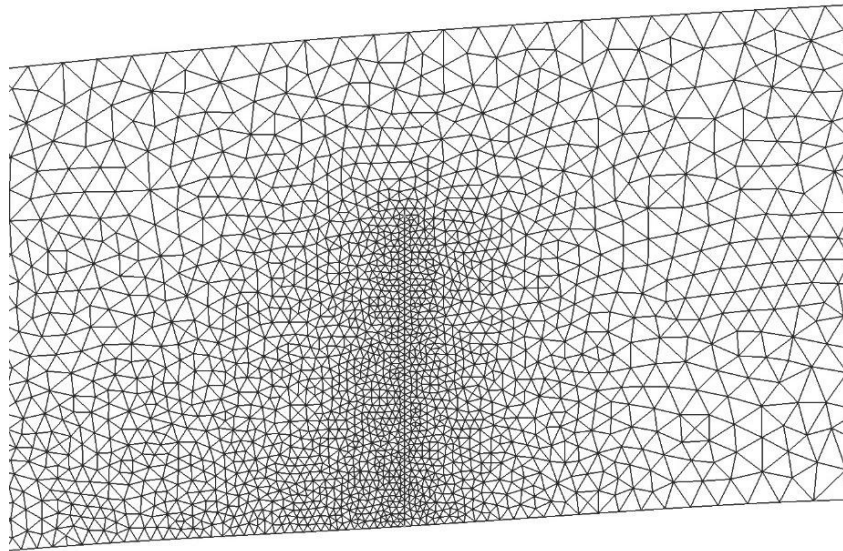
Para a simulação, foram adotados $\rho = 1520 \text{ kg} / \text{m}^3$, $C = 1065 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ e uma fonte de calor média na linha de corte de $\bar{Q} = 3500 / V_{CVAdj}$, onde o V_{CVAdj} é o volume (área em 2D) de todos os volumes de controle adjacentes à linha de corte à laser. O tensor de condutividade térmica tem como direções principais $k_{xx} = 8 \text{ W} / \text{m}^\circ\text{C}$ e $k_{yy} = 0,67 \text{ W} / \text{m}^\circ\text{C}$, é rotacionado em 45° e tem o tensor completo apresentado na equação 36.

$$K = \begin{pmatrix} 4,33 & 3,66 \\ 3,66 & 4,33 \end{pmatrix} \quad 36$$

A condição de contorno de Robin é adotada, sendo que nas superfícies livres ou é considerado o coeficiente de transferência de calor de $h = 10 \text{ W} / \text{m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$ ou a temperatura do meio de $T_\infty = 25^\circ\text{C}$ (WANG, 2016). Foram feitos testes prévios a fim de se obter um valor de Δt refinado, o que tornaria a solução precisa. O resultado foi a execução de cortes com duração de 5 segundos e 5000 passos de tempo, o que resulta em um $\Delta t = 0,001\text{s}$.

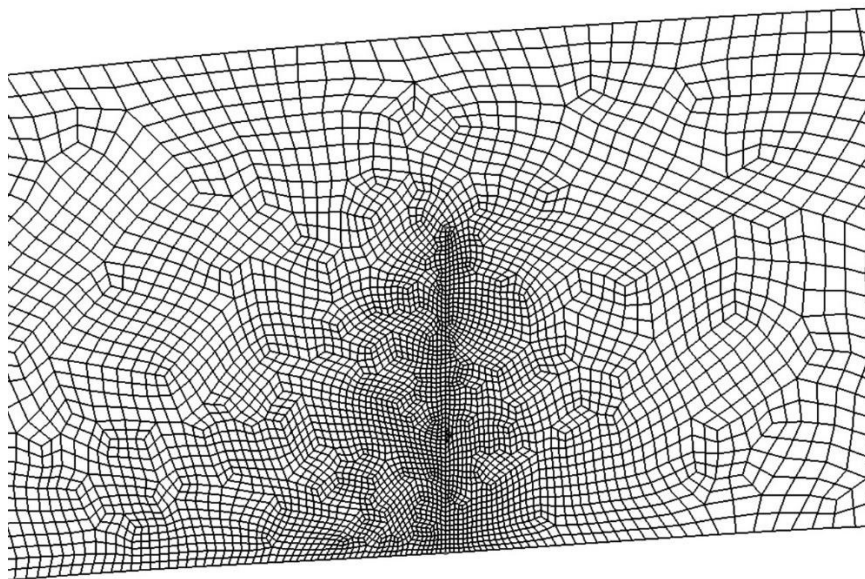
Para este caso, foram implementados dois tipos de malha. A primeira é uma malha Delaunay com geometria triangular desestruturada com 9.459 volumes de controle. Ela fica mais refinada próxima da linha da fonte térmica, que é onde os efeitos térmicos são mais relevantes. Ela é demonstrada na Figura 10. O segundo tipo é uma quadrangular não estruturada que foi subdividida em 9.928 volumes de controle. A exemplo da anterior, ela também fica mais refinada na região próxima à atuação do laser. Ela é demonstrada na Figura 11.

Figura 10 - Fragmento de malha triangular do Caso 2



Fonte: Autor (2023)

Figura 11 - Fragmento da malha quadrangular do Caso 2



Fonte: Autor (2023)

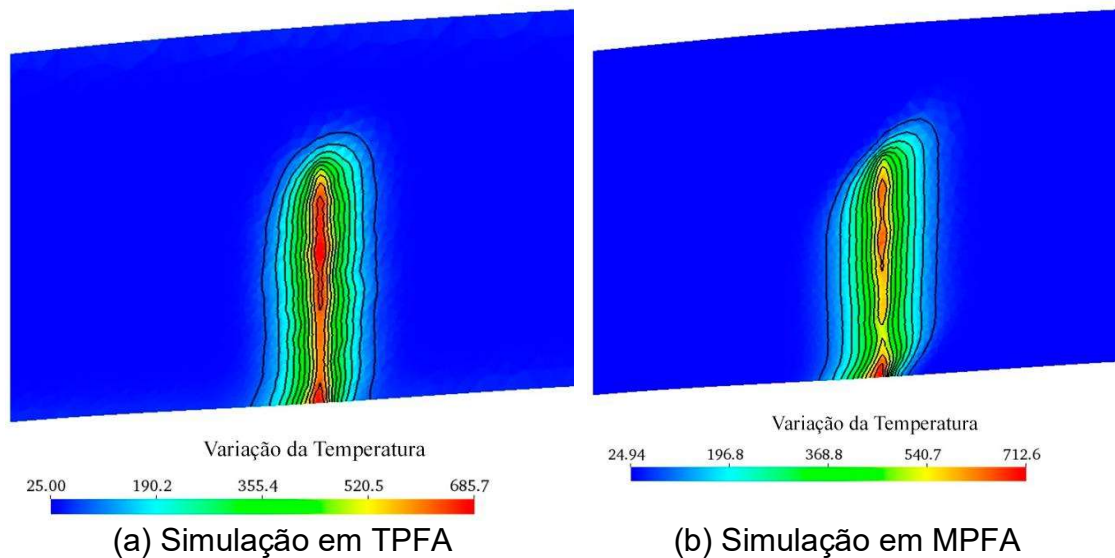
Como não foi obtida uma solução analítica para esse problema, a conclusão advinda do *benchmark* será considerada na análise de resultados do Caso 2. Devido ao problema tratar de um meio anisotrópico que é não ortogonal,

é suposto que o campo de temperaturas do MPFA representa um resultado mais convergente que o TPFA.

A Figura 12 (a) representa a distribuição de temperaturas neste corte a laser usando-se o TPFA, enquanto a Figura 12 (b) representa o campo de temperaturas para o MPFA. É perceptível que a distribuição no MPFA é mais suave, o que demonstra uma menor influência do corte a laser nas propriedades do material.

Para avaliar a distribuição de temperatura antes do corte, passando por ele, e após é considerada uma linha imaginária que o atravessa de forma transversal, conforme é demonstrado na Figura 13.

Figura 12 - Campo de temperaturas para malha triangular



Fonte: Autor (2023)

Figura 13 - Representação da linha imaginária transversal ao corte a laser

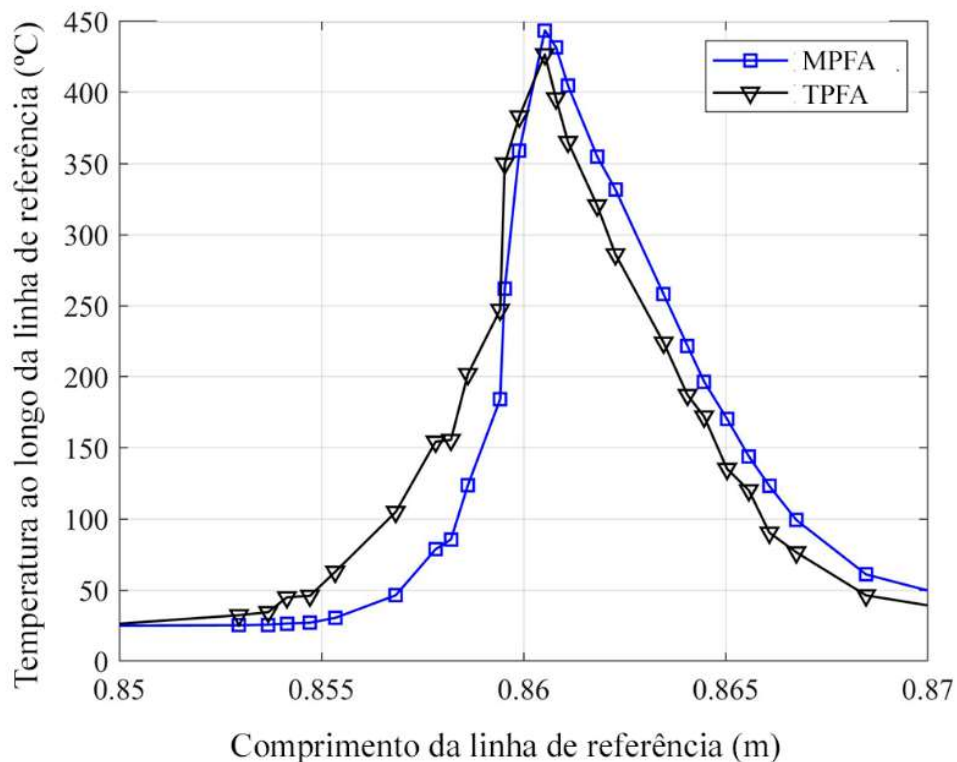


Fonte: Autor (2023)

A distribuição de temperatura tanto para TPFA quanto para MPFA na linha, que cruza a borda superior do corte, é exemplificada na Figura 14. Nela, é vista que apesar dos métodos serem responsáveis por produzir soluções numéricas distintas, essa linha não sofre grande influência. Visualmente, a linha do MPFA aparece um pouco atrasada em relação à do TPFA, e também apresenta uma temperatura máxima mais alta.

Para a malha quadrangular foram feitos os mesmos estudos, dos feitos na malha triangular. O campo de temperaturas simulado é apresentado na Figura 15, onde o (a) indica a simulação em TPFA e o (b) em MPFA.

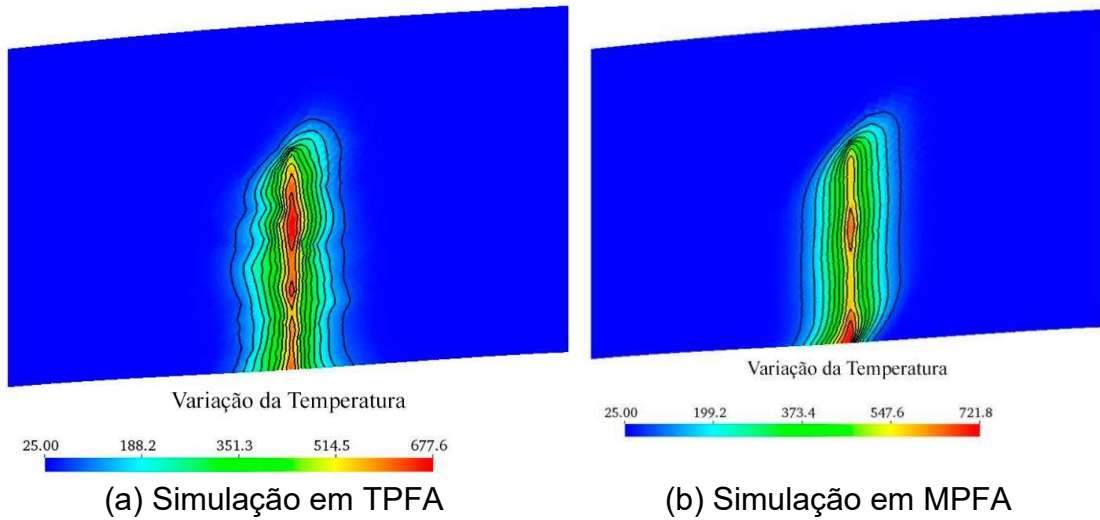
Figura 14 - Distribuição de temperaturas na linha de referência para malha triangular



Fonte: Autor (2023)

Com a malha quadrangular, o campo de temperaturas do TPFA segue mais ruidoso em relação ao MPFA. Isso se dá porque esse método sofre mais influência da orientação da malha, ocasionando o aparecimento de variações que seguem suas curvas. Esse entendimento tem fundamento na Figura 16, que apresenta o mesmo resultado da simulação da Figura 16 com a sobreposição da malha e da zona termicamente afetada (HAZ).

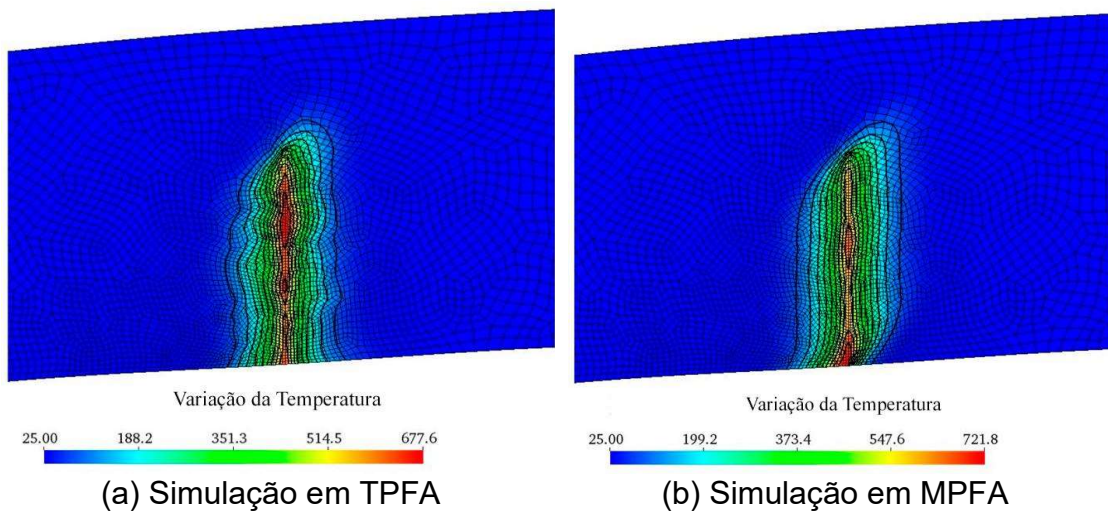
Figura 15 - Campo de temperaturas para malha quadrangular



Fonte: Autor (2023)

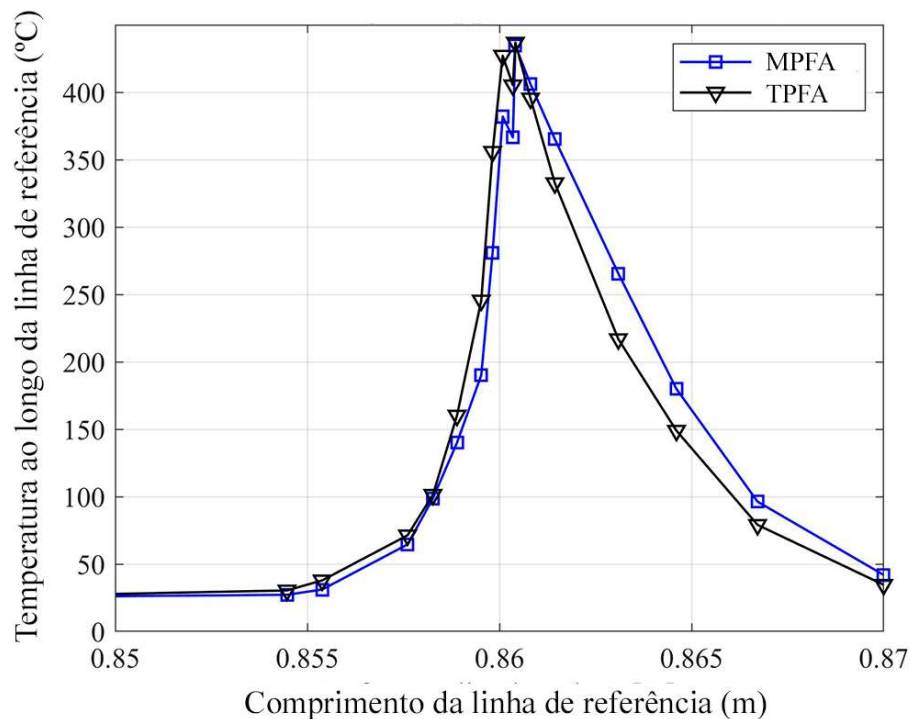
Na Figura 16 (a) é possível perceber que a distribuição de temperatura depende da orientação da malha, diferente da Figura 16 (b), onde ela ocorre de forma independente e mais uniforme, como se a malha nem existisse.

Figura 16 - Campo de temperaturas para malha quadrangular com malha e HAZ



Fonte: Autor (2023)

Figura 17 - Distribuição de temperaturas na linha de referência para malha quadrangular



Fonte: Autor (2023)

A Figura 17 apresenta a temperatura na linha imaginária transversal ao corte, mas desta vez para a malha retangular. O gráfico é similar ao apresentado na Figura 14, porém há uma divergência entre as simulações que merece destaque. A disparidade na temperatura entre os dois gráficos chega a 100°C quando são comparados os pontos que apresentam maior discrepância dentro das curvas.

Como neste exemplo não temos um resultado analítico, não pode-se afirmar qual o melhor método para resolução. Mas os resultados do *benchmark* e as diferenças entre os resultados obtidos para TPFA e MPFA apontam que em um caso com forte anisotropia e não ortogonalidade da malha, características deste exemplo, necessita de um método mais robusto, como o MPFA. Para esses casos, segundo o *benchmark*, o TPFA não convergiu.

5. CONCLUSÃO

As aplicações consideradas neste trabalho tiveram uma adaptação dos métodos TPFA e MPFA e foram fundamentadas no método de volumes finitos *cell-centred*. O primeiro caso é um exemplo clássico que tem a finalidade de servir de referência para o caso 2, que tem um nível maior de complexidade. Ele demonstrou que para uma malha cartesiana o TPFA e o MPFA apresentaram um resultado semelhante, que convergiu para o resultado analítico. Isso nos leva a concluir que ambos são aptos a obter uma solução válida para uma malha cartesiana.

Ainda no caso 1, no segundo exemplo a malha sofre uma distorção e perde a característica da regularidade. Os resultados do TPFA passaram a não convergir mais, diferente do MPFA que seguiu convergindo em direção ao resultado analítico. Isso demonstra que o MPFA é um método eficiente mesmo para uma malha que não é k-ortogonal, diferente do TPFA.

No caso 2, a simulação envolveu o corte a laser em uma pá eólica. O objetivo foi avaliar o efeito térmico que o laser causaria nas características do material, que é anisotrópico e possui uma estrutura complexa. A primeira malha considerada foi triangular, e teve resultados diferentes para os dois métodos, mas nada muito complexo que pudesse validar a hipótese. Porém, quando foi utilizada uma malha quadrangular, as zonas afetadas termicamente apresentaram diferenças significativas entre os dois métodos. O TPFA seguiu a orientação da malha, enquanto o MPFA se comportou de uma forma mais independente, o que é uma forma mais fiel à realidade. Outra diferença entre ambos foi a diferença de 100°C entre os pontos de temperaturas simulados pelo TPFA e MPFA, reiterando a diferença na solução obtida em cada um.

O MPFA converge para quaisquer malhas e para tensores não ortogonais, diferente do TPFA. Isso demonstra uma melhor adequação do MPFA para trabalhar com o problema proposto no caso 2 e conclui-se que os objetivos principais deste trabalho foram alcançados. Porém, o MPFA-O (forma utilizada neste trabalho) é deficiente para lidar com razões elevadas de anisotropia ($k_{xx} \gg k_{yy}$). Mas existem outros métodos que tem resultados coerentes para esse tipo de cenário, como os métodos cuja discretização são procedimentos não lineares.

Para pesquisas futuras, sugere-se aplicar esses métodos para o problema abordado neste trabalho. Outra sugestão é a aplicação desta versão do MPFA para problemas transientes de outras áreas, como problemas de difusão. Uma aplicação que também pode ser relevante seria avaliar o efeito do termo de

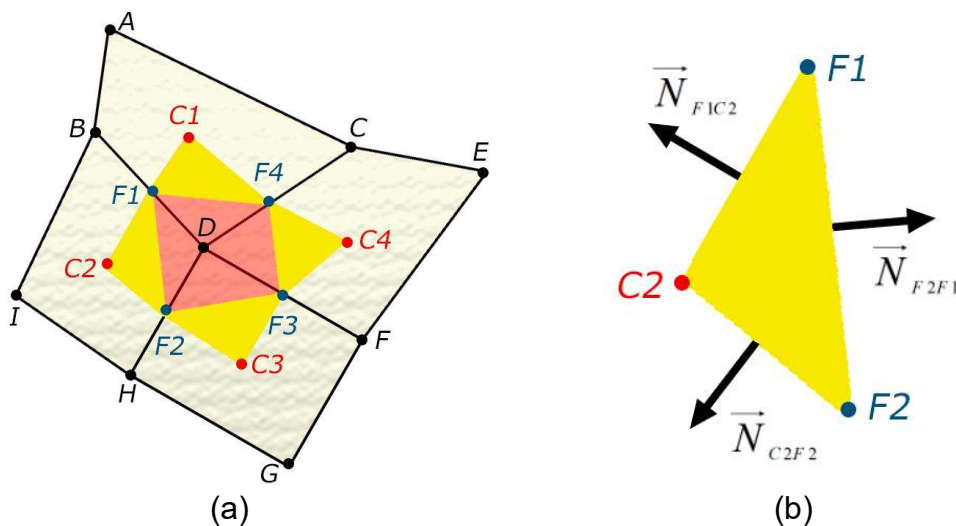
acumulação (transiente) sobre a contenção de instabilidades numéricas para problemas com elevada razão de anisotropia.

ANEXO A

O MPFA-O é a forma mais popular de MPFA. Sua solução conta com a consideração de que o fluxo é contínuo no ponto central de cada face presente entre os volumes de controle. (MOHAMMADNIA, REYNOLDS e FOROUZANFAR, 2017). Uma importante etapa para sua discretização é a aproximação do seu gradiente. Ele pode ser feito de duas formas: fundamentado no teorema da divergência (Aavatsmark *et al*, 1998) e na transformação do gradiente, transportando-o de um espaço de referência para um espaço físico (EDWARDS e ROGERS, 1998). Aqui neste anexo será feita uma demonstração do método de Edwards e Rogers (1998), que não foi aplicado na pesquisa. Porém, diferente do desenvolvido ao longo do trabalho, será considerado um gradiente de pressão.

As duas abordagens têm como princípio os dois pontos auxiliares e o ponto de colocação que formam a área de suporte, ilustrada nos volumes de controle (fundo branco) e da região de interação (fundo vermelho), na Figura 18 (a) e representada com mais detalhes na Figura 18 (b). A equação 37 mostra a integração do gradiente de pressão da área de suporte triangular usando-se o Teorema da Divergência.

Figura 18 - Camadas de volumes finitos, região de interação e área de suporte



Fonte: Autor (2023)

$$\int_{\Omega_{F_1C_2F_2}} \bar{\nabla} p \partial \Omega_{ABC} = \int_{\Gamma_{F_1C_2F_2}} p \partial \Gamma_{F_1C_2F_2} \quad 37$$

O Ω_{ABC} é o volume da área de suporte da Figura 18 (b), ou área – tratando-se de um domínio 2D. Uma hipótese simplificadora aplicada é que a distribuição de pressão nele é linear. Portanto, seu gradiente é constante e pode sair da integral, conforme é mostrado no lado esquerdo da equação 38. No lado direito é aplicado o Teorema do Valor Médio.

$$\bar{\nabla} p = \frac{1}{\Omega_{F_1C_2F_2}} \sum_{i=1}^3 p_i \bar{N}_i \quad 38$$

O i presente no somatório da equação 38 refere-se aos pontos médios da área de suporte triangular. Portanto, o p_i e o \bar{N}_i indicam, respectivamente, a pressão e um vetor normal para cada um desses pontos. Essas pressões podem ser escritas como uma média dos extremos de cada face, e fazendo essa adaptação, tem-se a equação 39.

$$\bar{\nabla} p = \frac{1}{2\Omega_{F_1C_2F_2}} [(p_{F_1} + p_{C_2})\bar{N}_{F_1C_2} + (p_{C_2} + p_{F_2})\bar{N}_{C_2F_2} + (p_{F_2} + p_{F_1})\bar{N}_{F_2F_1}] \quad 39$$

Utilizando o princípio da conservação de massa, tem-se que o somatório dos vetores $\bar{N}_{F_1C_2}$, $\bar{N}_{C_2F_2}$ e $\bar{N}_{F_2F_1}$ é igual a zero. Isso permite que sejam consideradas duas relações entre eles, ilustradas nas equações 40 e 41.

$$\bar{N}_{F_1C_2} = -\bar{N}_{C_2F_2} - \bar{N}_{F_2F_1} \quad 40$$

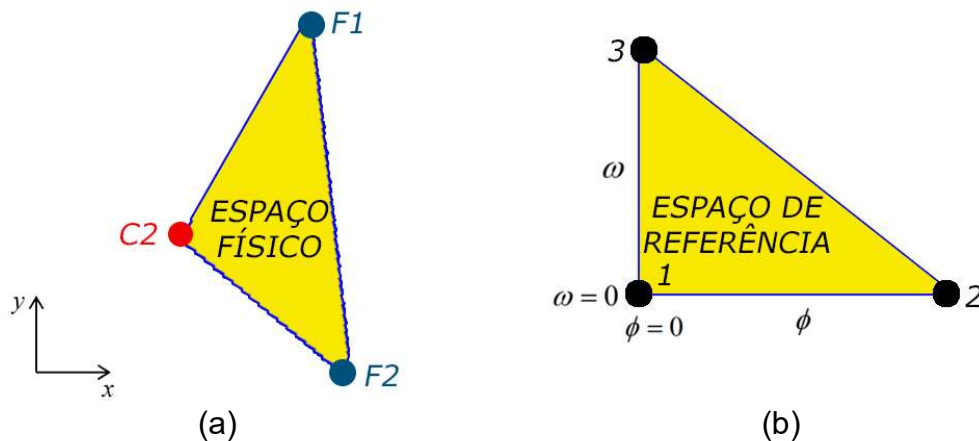
$$\bar{N}_{C_2F_2} = -\bar{N}_{F_2F_1} - \bar{N}_{F_1C_2} \quad 41$$

Substituindo as equações 40 e 41 na equação 39 e rearrajando-a, chega-se à equação 42, que é análoga à equação 21, com a diferença de que se referente a gradiente de pressão, e não mais temperatura.

$$\nabla p = -\frac{1}{2\Omega_{F_1C_2F_2}}(p_{F_1}N_{F_1C_2} + p_{C_2}N_{C_2F_2} + p_{F_2}N_{F_2F_1}) \quad 42$$

A abordagem que foi adotada por Edwards e Rogers (1998) utiliza um triângulo de referência como área de suporte. A relação entre ele e o triângulo físico, que é o mesmo do considerado na Figura 18 (b), é mostrada na Figura 19.

Figura 19 - Espaço físico e espaço de referência



Fonte: Autor (2023)

O espaço de referência da Figura 19 (b) mostra que o gradiente de pressão pode ser aproximado a partir de uma diferença de potenciais. A equação 43 mostra a distribuição linear de pressão nele, onde os termos ϕ e ω são as coordenadas do gráfico da Figura 19 e os p_i são as pressões nos pontos correspondentes.

$$p(\phi, \omega) = p_1\phi + p_2\omega + p_3(1 - \phi - \omega) \quad 43$$

Isolando-se as coordenadas na equação 43, tem-se a equação 44.

$$p(\phi, \omega) = \phi(p_1 - p_3) + \omega(p_2 - p_3) + p_3 \quad 44$$

Paralelamente ao que foi descrito na equação 43, pode-se escrever as coordenadas do espaço físico (x e y) em função das coordenadas do espaço de referência (ϕ e ω). Para tal, tem-se um mapeamento biunívoco, descritos nas equações 45 e 46.

$$x(\phi, \omega) = x_1\phi + x_2\omega + x_3(1 - \phi - \omega) \quad 45$$

$$y(\phi, \omega) = y_1\phi + y_2\omega + y_3(1 - \phi - \omega) \quad 46$$

A equação 44 retrata a distribuição de pressão em função da diferença entre os valores do espaço físico. As equações 47 e 48 se fundamentam nela para chegar na derivada para cada espaço de referência.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \phi} \right)^T = (p_1 - p_3)^T \quad 47$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \omega} \right)^T = (p_2 - p_3)^T \quad 48$$

A equação 49 une as equações 47 e 48, e representa o gradiente de pressão do espaço de referência.

$$\bar{\nabla} p_{\phi,\omega} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \phi} & \frac{\partial p}{\partial \omega} \end{bmatrix}^T \quad 49$$

Levando-se em conta a dependência estabelecida nas equações 45 e 46 e a Regra da Cadeia aplicada sobre a equação 49, o gradiente de pressão no espaço de referência pode ser descrito com a mesma variável no espaço físico, conforme é mostrado nas equações 50 e 51.

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} \quad 50$$

$$\frac{\partial p}{\partial \omega} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \omega} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \omega} \quad 51$$

Reescrevendo-se as equações 47 e 48 na forma matricial, tem-se a equação 52.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\ \frac{\partial p}{\partial \omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \omega} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix} \quad 52$$

A mudança de base para o gradiente de pressão necessita do emprego de uma matriz de transformação, que será usada a Jacobiana (J). Assim, para se obter o gradiente do espaço físico, deve-se multiplicar o gradiente da referência pela matriz inversa de J , conforme é mostrado na equação 53.

$$\bar{\nabla} p_{x,y} = J^{-1} \bar{\nabla} p_{\phi,\omega} \quad 53$$

A inversa da matriz Jacobiana é obtida com a matriz de cofatores dividida pelo determinante de J , conforme é demonstrado na equação 54.

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \omega} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \omega} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(J)} \begin{pmatrix} (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) \end{pmatrix} \quad 54$$

Quando é considerado o suporte triangular $F_1C_2F_2$, o $\det(J)$ equivale ao dobro da área de suporte, que é dado por $2\Omega_{F_1C_2F_2}$. Além disso, sua inversa para esse suporte pode ser escrita em função dos vetores normais às faces da área de suporte, o que é demonstrado na equação 55

$$J_{F_1C_2F_2}^{-1} = \frac{1}{2\Omega_{F_1C_2F_2}} (\vec{N}_{C_2F_1} \quad \vec{N}_{C_2F_2}) \quad 55$$

A partir da equação 55, inserindo as diferenças de pressão da equação xx e fazendo as devidas relações ($C_2 = 3, F_1 = 1$ e $F_2 = 2$) o gradiente de pressão para a área de suporte considerada é dada pela equação 56.

$$\vec{\nabla} p_{x,y} = \frac{1}{2\Omega_{F_1C_2F_2}} (\vec{N}_{C_2F_1} \quad \vec{N}_{C_2F_2}) \begin{pmatrix} p_{F_1} - p_{C_2} \\ p_{F_2} - p_{C_2} \end{pmatrix} \quad 56$$

$$\vec{\nabla} p_{x,y} = \frac{1}{2\Omega_{F_1C_2F_2}} [\vec{N}_{C_2F_1} (p_{F_1} - p_{C_2}) + \vec{N}_{C_2F_2} (p_{F_2} - p_{C_2})]$$

REFERÊNCIAS

AAVATSMARK, Ivar et al. Discretization on non-orthogonal, quadrilateral grids for inhomogeneous, anisotropic media. **Journal of computational physics**, Bergen, v. 127, n. 1, p. 2-14, 1996.

AAVATSMARK, Ivar et al. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part I: Derivation of the methods. **SIAM Journal on Scientific Computing**, Norway, v. 19, n. 5, p. 1700-1716, 1998.

AAVATSMARK, Ivar. Multipoint flux approximation methods for quadrilateral grids. In: 9th International forum on reservoir simulation, Abu Dhabi. P.9-13. 2007.

AMBRUS, Jaime. **Volumes finitos utilizando aproximações de múltiplos pontos aplicados à simulação numérica de reservatórios de petróleo**. 99p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

BANK, Lawrence C. et al. Structural analysis of FRP parts from waste wind turbine blades for building reuse applications. *Advances in engineering materials, structures and systems: Innovations, mechanics and applications*, London, 2019.

BERGMAN, Theodore L., LAVINE Adrienne; **Incropera fundamentos de transferência de calor e massa**, 8ª ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2019

CHAPRA, Steven C. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB® para Engenheiros e Cientistas**, 3ª ed. – Porto Alegre: AMGH, 2013.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia**, 7ª ed. – Porto Alegre: AMGH, 2016.

CHANG, Lina; SHENG, Zhiqiang; YUAN, Guangwei. **An improvement of the two-point flux approximation scheme on polygonal meshes.** *Journal of Computational Physics*, Beijing, v. 392, p. 187-204, 2019.

CHEN, Qian-Yong et al; Enriched multi-point flux approximation for general grids. *Journal of Computational Physics*, v. 227, n. 3, p. 1701-1721, 2008.

ÇENGEL, Yunus A.; GHAJAR, A. J. **Transferência de Calor e Massa**, 4ª ed. – Porto Alegre: AMGH, 2012.

DANIEL, Isaac M.; ISHAI, Ori. **Engineering Mechanics of Composite Materials**, New York –USA, Oxford University Press, 1994.

EDWARDS, Michael G.; ROGERS, Clive F. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation. *Computational geosciences*, v. 2, p. 259-290, 1998.

EIGESTAD, G. T.; et al. MPFA Methods Applied To irregular grids and faults. In: **Developments in water science**. Elsevier, 2002. p. 413-420.

FADIGAS, Eliane A. F. A. **Energia eólica**, 1ª ed. – Barueri: Manole, 2011.

FIORELLI, Juliano. **Utilização de fibras de carbono e de fibras de vidro para reforço de vigas de madeira**. 168 p. Dissertação (Mestrado em Ciências e Engenharia de Materiais), Universidade de São Paulo. São Carlos, 2002.

GAO, Yulong; YI, Shuping; ZHENG, Chunmiao. Efficient simulation of groundwater solute transport using the multipoint flux approximation method with arbitrary polygon grids. *Journal of Hydrology*, v. 601, p. 126637, 2021.

GWEC, **Global Wind Energy Council**. Global Wind Report. Brussels, 2022.

JOUSTRA, Jelle; FLIPSEN, Bas; BALKENENDE, Ruud. Structural reuse of high end composite products: A design case study on wind turbine blades. **Resources, Conservation and Recycling**, v. 167, p. 105393, 2021.

KLAUSEN, Runhild A.; RUSSELL, Thomas F. Relationships among some locally conservative discretization methods which handle discontinuous coefficients. **Computational Geosciences**, v. 8, n. 4, p. 341-377, 2004.

KLAUSEN, Runhild A.; STEPHANSEN, Annette F. Convergence of the MPFA O-method on general grids. **Pure mathematics**, Oslo, 2010.

LEITE, Vinicius Reis Leite Reis. Estado da arte dos materiais compósitos na indústria aeronáutica, **Ciências Exatas**, v. 20, p. 16. 2015.

LEON, Mishnaevsky J. Recycling of wind turbine blades: Recent developments. **Current Opinion in Green and Sustainable Chemistry**, v. 39, p. 100746, 2023.

LIU, Pu; BARLOW, Claire Y. Wind turbine blade waste in 2050. **Waste Management**, v. 62, p. 229-240, 2017.

LIU, Pu; MENG, Fanran; BARLOW, Claire Y. Wind turbine blade end-of-life options: An economic comparison. **Resources, Conservation and Recycling**, v. 180, p. 106202, 2022.

LM Glasfiber. **Technical blade specification. Project LM 48.8 P**. 2009.

LUKÁCS, Tamás; PERESZLAI, Csongor; GEIER, Norbert. Delamination measurement in glass fibre reinforced polymer (GFRP) composite based on image differencing. **Composites Part B: Engineering**, v. 248, p. 110381, 2023.

MAJEWSKI, Peter et al. End-of-life policy considerations for wind turbine blades. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 164, p. 112538, 2022.

MALISKA, Clovis R.; **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**, 2ª ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2017.

MENG, Hang et al. Modelling of anisotropic beam for rotating composite wind turbine blade by using finite-difference time-domain (FDTD) method. **Renewable Energy**, v. 162, p. 2361-2379, 2020.

MOHAMMADNIA, Reza; REYNOLDS, Albert C.; FOROUZANFAR, Fahim. Monotonicity conditions for MPFA methods for a numerical well testing reservoir simulator. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 158, p. 707-728, 2017.

MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. **The finite volume method in computational fluid dynamics: an advanced introduction with OpenFOAM® and Matlab®**, - Switzerland, Springer, 2016.

NAGLE, Angela J. et al. Life cycle assessment of the use of decommissioned wind blades in second life applications. **Journal of Environmental Management**, v. 302, p. 113994, 2022.

ROCHA, Larissa M.; et al. A Transient Heat Conduction Simulation of An Anisotropic Material Applied in Wind Turbine Blade for the Reuse Context, 2022.

RODRIGUES, Mônica Aparecida; SILVA, Priscila Pereira; GUERRA, Wendell. Cobre. **Química nova na escola**, v. 34, n. 3, p. 161-162, 2012.

SOUZA, Márcio R. A.; **Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos Utilizando um Método de Volumes Finitos “Verdadeiramente” Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem**. 258 p. Tese (Doutorado em ciências de Engenharia Civil) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015

YAZDANBAKHSH, Ardavan; BANK, Lawrence C.; TIAN, Yuan. Mechanical processing of GFRP waste into large-sized pieces for use in concrete. **Recycling**, v. 3, n. 1, p. 8, 2018.

YAO, Weian et al. A precise integration boundary element method for solving transient heat conduction problems. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 78, p. 883-891, 2014.

ZHANG, Wenjuan; AL KOBALSI, Mohammed. A two-step finite volume method for the simulation of multiphase fluid flow in heterogeneous and anisotropic reservoirs. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 156, p. 282-298, 2017.

ZHANG, YINUO et al. Numerical simulation of water jet-guided laser micromachining of CFRP. **Materials Today Communications**, v. 25, p. 101456, 2020.