



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE ENERGIAS ALTERNATIVAS E RENOVÁVEIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENERGIAS RENOVÁVEIS

MAURICIO ANDRÉS GAGGERO LAJAÑA

**MODELAGEM DO PROCESSO DA SECAGEM DE PRODUTOS
AGRÍCOLAS: FORMULAÇÃO DE LUIKOV CONSIDERANDO
PARÂMETROS TERMOFÍSICOS VARIÁVEIS E USO DA GITT**

JOÃO PESSOA/PB

2017

MAURICIO ANDRÉS GAGGERO LAJAÑA

MODELAGEM DO PROCESSO DA SECAGEM DE PRODUTOS
AGRÍCOLAS: FORMULAÇÃO DE LUIKOV CONSIDERANDO
PARÂMETROS TERMOFÍSICOS VARIÁVEIS E USO DA GITT

Dissertação apresentada à Universidade Federal da Paraíba, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Energias Renováveis do Centro de Energias Alternativas e Renováveis, área de concentração em energias renováveis, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador(a)

Dra. Cristiane Kelly Ferreira da Silva

JOÃO PESSOA/PB

2017

L191m Lajaña, Mauricio Andrés Gaggero.

Modelagem do processo da secagem de produtos agrícolas:
formulação de luikov considerando parâmetros termofísicos
variáveis e uso da GITT / Mauricio Andrés Gaggero Lajaña.-
João Pessoa, 2017.

78 f. : il.-

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Cristiane Kelly Ferreira da Silva.
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CEAR

1. Secagem Solar. 2. Luikov. 3. GITT. I. Título.

UFPB/BC

CDU – 620.91(043)

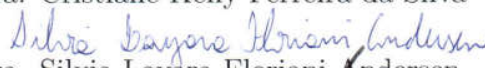
MAURICIO ANDRÉS GAGGERO LAJAÑA

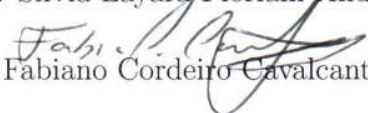
MODELAGEM DO PROCESSO DA SECAGEM DE PRODUTOS
AGRÍCOLAS: FORMULAÇÃO DE LUIKOV CONSIDERANDO
PARÂMETROS TERMOFÍSICOS VARIÁVEIS E USO DA GITT

Dissertação apresentada à Universidade Federal da Paraíba, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Energias Renováveis do Centro de Energias Alternativas e Renováveis, área de concentração em energias renováveis, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 23 de Fevereiro de 2017.


Prof. Dra. Cristiane Kelly Ferreira da Silva UFPB


Prof. Dra. Silvia Layara Floriani Andersen UFPB


Prof. Dr. Fabiano Cordeiro Cavalcanti UFPB

Orientador(a)

Dra. Cristiane Kelly Ferreira da Silva

JOÃO PESSOA/PB

2017

RESUMO

A secagem de alimentos agrícolas é uma das primeiras técnicas usadas pelo homem com a finalidade de preservar os alimentos sem alterar o seu valor nutricional, sabor, textura etc. Com o passar do tempo, tem aparecido algumas sofisticações no processo, mas os princípios essenciais continuam sendo os mesmos. A secagem consiste em retirar a umidade de um certo produto, a qual é feita por uma combinação de aplicação de calor e de ventilação. Os fenômenos físicos presentes no processo de secagem são a transferência de calor e a transferência de massa, os quais se manifestam através dos mecanismos de condução e de convecção, e de difusão e de evaporação, respectivamente. No presente trabalho, se utilizará o modelo de Luikov, o qual considera as transferências de calor e de massa como um problema acoplado, a diferença de outros modelos existentes, que consideram ambas as transferências como problemas separados. No modelo de Luikov são definidos certos parâmetros termofísicos, associados aos números adimensionais Lu , Bi_q e Bi_m , que devem ser escolhidos para obter resultados numéricos similares aos experimentais. Uma opção seria escolher aqueles parâmetros como constantes, obtendo o que se conhece como o sistema linear de Luikov. Porém, neste trabalho, o objetivo é estudar o fenômeno considerando os parâmetros como funções que variam no tempo. Isso faz com que as equações percam a sua linearidade, tornando-os mais difíceis de resolver. Se utilizará um método de resolução chamado Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), o qual é um método híbrido, analítico-numérico, cuja definição depende fortemente das condições iniciais e de contorno. Foram analisados seis casos, variando os parâmetros Lu , Bi_q e Bi_m , seguindo funções lineares crescentes e decrescentes. Em termos gerais, os resultados foram os esperados: quando Lu decresce, a temperatura cresce com maior velocidade e a umidade decresce com menor velocidade; quando Bi_q cresce, a temperatura cresce com menos velocidade e a umidade decresce com a mesma taxa; e quando Bi_m cresce, a temperatura cresce com menor velocidade e a umidade decresce a uma taxa maior. Conclui-se que o modelo depende fortemente dos parâmetros estudados, tornando interessante o estudo experimental do fenômeno.

Palavras chave: Secagem solar, Luikov, GITT

ABSTRACT

Agricultural products drying is one of the first techniques used by mankind in order to preserve food without compromising its nutritional value, taste, texture, etc. Along time, there have been some sophistications in the process, but its essential principles remain the same. Drying consists in extracting the humidity of a certain product, which is done by a combination of ventilation and heat exposure. The physical phenomena involved in the drying process are heat and mass transfer, which manifest themselves through the mechanisms of conduction and convection, and diffusion and evaporation, respectively. In this research, Luikov's model was used because it considers heat and mass transfer as a coupled problem, in opposition to other models in which they are considered to be isolated problems. In Luikov's model, thermophysical parameters are defined, related to the dimensionless numbers Lu , Bi_q and Bi_m , and they must be carefully chosen in order to obtain acceptable results (similar to experimental results). One option can be choosing these parameters as constants, obtaining Luikov's linear system of equations. Nevertheless, in this research, the thermophysical parameters were chosen as functions of time. The result is a non-linear system of equations, which is more difficult to solve. For solving the equations, the General Integral Transform Technique (GITT) was used. It is a hybrid analytical-numerical method, which definition depends strongly on the initial and border conditions. Six cases were analyzed, defining Lu , Bi_q and Bi_m as linear increasing and decreasing time functions. In general terms, the results were the expected ones: when Lu decreases, temperature increases with a higher rate and humidity decreases with a lower rate; when Bi_q increases, temperature increases with a lower rate and humidity decreases with the same rate; and when Bi_m increases, temperature increases with a lower rate and humidity decreases with a higher rate. It can be concluded that the model depends strongly on these parameters, making interesting further experimental research.

Keywords: Solar drying, Luikov, GITT

Lista de Figuras

1	Secagem direta	18
2	Secagem indireta[11]	19
3	Banana passa[14]	20
4	Meio poroso capilar unidimensional[3]	21
5	Fases da secagem[1]	22
6	Secador tipo “estufa”[1]	24
7	Secador tipo “prateleiras”[1]	25
8	Secadores ativos[1]	26
9	Secador CEAR[3]	27
10	Elemento de volume [36]	28
11	Volume de controle	30
12	Modelos de meio poroso	32
13	Meio poroso capilar unidimensional[3]	38
14	Resultados para o modelo considerando Lu crescente.	53
15	Resultados para o modelo considerando Lu decrescente.	54
16	Resultados para o modelo considerando Bi_q crescente.	55
17	Resultados para o modelo considerando Bi_q decrescente.	56
18	Resultados para o modelo considerando Bi_m crescente.	57
19	Resultados para o modelo considerando Bi_m decrescente.	58
20	Gráficos de temperatura vs tempo: variando Lu	60
21	Gráficos de teor de umidade vs tempo: variando Lu	61
22	Gráficos de temperatura vs tempo: variando Bi_q	63
23	Gráficos de umidade vs tempo: variando Bi_q	64
24	Gráficos de temperatura vs tempo: variando Bi_m	66
25	Gráficos de umidade vs tempo: variando Bi_m	67
26	Elemento de volume [36]	74

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

A	área ($[m^2]$)
a	coeficiente de difusividade térmica ($[\frac{m^2}{s}]$)
a_m	coeficiente de difusão de massa ($[\frac{m^2}{s}]$)
A_p	superfície dos poros ($[m^2]$)
A_T	superfície total ($[m^2]$)
b_i	razão entre a superfície ocupada pela substância i , e a superfície total
Bi_q	número de Biot para transferência de calor
Bi_m	número de Biot para transferência de massa
c	calor específico do ar ($[\frac{J}{kg \cdot s}]$)
c_i	calor específico da espécie i ($[\frac{J}{kg \cdot s}]$)
c_m	calor específico do meio poroso ($[\frac{J}{kg \cdot s}]$)
$\vec{\nabla} c_{umidade}$	gradiente de concentração de umidade ($[\frac{1}{m}]$)
$D_{umidade}$	constante de proporcionalidade para a transferência de umidade ($[\frac{m}{s}]$)
h_c	coeficiente convectivo de transferência de calor (W/m^2K)
h_i	entalpia específica da substância i ($[\frac{J}{kg}]$)
h_m	coeficiente convectivo de transferência de massa ($kg/m^2s^\circ M$)
$i = 0$	matriz porosa seca
$i = 1$	vapor
$i = 2$	água
t	tempo ($[s]$)
J_i	geração da substância i devido a mudanças de fase ($[\frac{kg}{m^3s}]$)
$\overrightarrow{j_{i(dif)}}$	transferência de massa por difusão ($[\frac{kg}{m^2s}]$)
$\overrightarrow{j_{i(mol)}}$	transferência de massa por escoamento molar ($[\frac{kg}{m^2s}]$)
$\overrightarrow{j_q}$	densidade de fluxo de calor por condução ($[\frac{J}{m^2s}]$)
$\overrightarrow{J}_{umidade}$	taxa de transferência de massa ($[\frac{1}{s}]$)
k	condutividade térmica
k_m	condutividade mássica

Ko	número de Kossovich
K_{11}	coeficiente da equação (55)
K_{12}	coeficiente da equação (55)
K_{21}	coeficiente da equação (56)
K_{22}	coeficiente da equação (56)
L	comprimento máximo([m])
Lu	número de Luikov
m_d	massa de material seco ([kg])
m_i	massa da substância i ([kg])
m_w	massa de água ([kg])
Kn	número de Posnov
r_{21}	calor latente de evaporação ([$\frac{J}{kg}$])
$T(x, t)$	distribuição de temperatura ([K])
T_s	temperatura do ar ([K])
T_0	temperatura inicial do alimento ([K])
T^*	temperatura de equilíbrio ([K])
$u(x, t)$	distribuição de umidade ([$\frac{kg_{agua}}{kg_{material\ seco}}$])
u_i	concentração da espécie i ([$\frac{kg_i}{kg_{total}}$])
u_0	umidade inicial do alimento ([$\frac{kg_{agua}}{kg_{material\ seco}}$])
u^*	umidade de equilíbrio do sistema ([$\frac{kg_{agua}}{kg_{material\ seco}}$])
\vec{V}	velocidade ([$\frac{m}{s}$])
\vec{V}_i	velocidade do escoamento da substância i ([$\frac{m}{s}$])
V_i	volume ocupado pela substância i ([m^3])
W	umidade considerando o material úmido ([$\frac{kg_{agua}}{kg_{mistura}}$])
x	comprimento ([m])
X	comprimento adimensional
Y_s	umidade considerando o material seco ([$\frac{kg_{agua}}{kg_{material\ seco}}$])
Δx	deslocamento ([m])

δ	coeficiente termogradiante ($[K^{-1}]$)
ε	fração da mudança de umidade correspondente à evaporação
Φ	umidade adimensional
$\bar{\Phi}$	umidade adimensional homogeneizada
φ_i	autofunções do problema auxiliar para a transferência de massa
λ	coeficiente de condução total de calor ($[\frac{J}{Kms}]$)
λ_i	autovalores do problema auxiliar para transfcrcia de massa
μ_i	autovalores do problema auxiliar para transfcrcia de calor
Π	razão entre a superfície dos poros e a superfície total (adimensional)
$\bar{\Pi}$	porosidade superficial
Ψ_i	autofunções do problema auxiliar para a transferência de calor
ρ	densidade ($[\frac{kg}{m^3}]$)
ρ_0	massa específica constante ($[\frac{kg}{m^3}]$)
Θ	temperatura adimensional
$\bar{\Theta}_h$	temperatura adimensional homogeneizada
τ	tempo adimensional

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos	14
1.1.1	Objetivo Geral	14
1.1.2	Objetivos Específicos	14
1.2	Metodologia	15
2	REFERENCIAL TEÓRICO	16
2.1	Breve Revisão Histórica	16
2.2	Tipos de Secagem Solar	16
2.3	Condições de Secagem	19
2.4	Princípios de Secagem	20
2.4.1	Mecanismos Físicos	20
2.4.2	Taxa de Secagem	21
2.5	Tecnologias de Secagem Solar	23
2.5.1	Secadores Solares	23
2.6	Modelo de Luikov	27
2.6.1	Conservação da Massa	28
2.6.2	Conservação da Energia	33
2.7	Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT)	36
3	MATERIAL E MÉTODOS	38
3.1	Problema físico	38
3.2	Modelagem da Transferência Simultânea de Calor e de Massa	38
3.2.1	Adimensionalização das equações	40
3.3	Solução via Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT)	42
3.3.1	Primeiro passo	44
3.3.2	Segundo passo	45
3.3.3	Terceiro passo	46
3.3.4	Quarto passo	48
3.3.5	Quinto passo	48

3.4	Modelo computacional	48
3.5	Estudo dos parâmetros adimensionais das equações de Luikov	49
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	52
4.1	Análise da Transferência Simultânea de Calor e Massa com Parâmetros Adimensionais Variando	53
4.2	Estudo dos Parâmetros Adimensionais das Equações de Luikov	60
4.2.1	Comparação dos resultados variando Lu	60
4.2.2	Comparação dos resultados variando Bi_q	62
4.2.3	Comparação dos resultados variando Bi_m	65
5	CONCLUSÕES	69
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	70
A	ANEXOS	74
A.1	Divergência	74
A.2	Manipulação Matemática	75
A.2.1	Equações Diferenciais para Transferência de Umidade em Processos de Secagem	77

1. INTRODUÇÃO

A secagem solar é uma das técnicas mais antigas usadas pelo homem para secar tijolos e alimentos, no caso dos alimentos, com o objetivo de conservá-los sem perder propriedades como sabor, textura e valor nutricional. O filósofo Grego Aristóteles (384 - 322) foi o primeiro a dar explicações teóricas para descrever o fenômeno[1]. A secagem é um processo simples de extração do excesso de água presente em um determinado produto. Diminuir a umidade dos alimentos desacelera a ação de enzimas, de bactérias etc, aumentando a durabilidade do mesmo.

Existem dois tipos de secagem solar: secagem natural ou direta, na qual o alimento é exposto diretamente ao Sol, ou através de uma cobertura transparente; e secagem indireta, na qual o alimento é desidratado pelo contato com ar quente. O segundo tipo é mais sofisticado que o primeiro, permitindo controlar parâmetros como temperatura e velocidade do ar. Isso é importante para obter um produto de boa qualidade[1].

Os mecanismos físicos da secagem são transferência de massa e transferência de calor. A primeira ocorre por difusão desde o interior do alimento até a sua superfície, e logo por evaporação, quando entra em contato com o ar quente. A transferência de calor ocorre por convecção entre o ar quente em movimento e a superfície do alimento, e por condução no interior do mesmo. Pode-se dizer que o processo de secagem se desenvolve em três fases: a primeira ocorre a uma taxa constante, enquanto na segunda e terceira fase, a taxa é decrescente até atingir o equilíbrio[1].

Existem variadas tecnologias de secagem Solar, as quais podem ser divididas em dois grandes grupos: secadores ativos e secadores passivos. A diferença entre os dois tipos é o tipo de circulação. Nos secadores ativos, a circulação é forçada, enquanto, nos secadores passivos é natural. Os dispositivos de ambos tipos são relativamente simples, contendo um espaço onde o alimento será secado, um sistema de aquecimento e circulação de ar e partes auxiliares, tais como canos, termômetros etc[1].

O fenômeno físico da secagem pode ser representado pelo modelo de Luikov,[2] o qual relaciona a transferência de massa e de calor em um sistema de equações acoplado. Tal modelo considera o alimento como um meio poroso, cujas regiões livre contém água ou vapor. Para cada elemento de volume, é feito um balanço de massa e de energia, os quais são acoplados em um único sistema de equações. Na dedução matemática do sistema acoplado se definem os seguintes parâmetros termofísicos:

coeficiente de difusão de massa (a_m), coeficiente termogradiante (δ), critério de mudança de fase (ε) e calor latente de evaporação (r_{21}). Usualmente, os parâmetros termofísicos são considerados constantes, pois faz com que o sistema de equações seja linear.

Soluções de problemas envolvendo transferência simultânea de calor e massa em meios porosos são apresentadas na literatura por meio de diversos métodos e técnicas, tais como: Método de Diferenças Finitas, Métodos de Elementos Finitos e Soluções Analíticas, entre outros. Dentro deste contexto, técnicas de soluções híbridas analítico numéricas têm sido desenvolvidas e utilizadas. Dentre estas técnicas destaca-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). A GITT tem sido bastante utilizada em problemas de transferência de calor e de massa, porém, a aplicação desta técnica em problemas de secagem de alimentos é ainda escassa. Esta é uma técnica híbrida analíticonumérica para resolver problemas complexos. A estratégia de resolução depende fortemente das condições iniciais e de contorno.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Visando contribuir na predição da secagem indireta de produtos agrícolas, este trabalho tem como objetivo geral investigar as transferências simultâneas de calor e de massa durante este processo, mediante a abordagem de um modelo matemático com solução híbrida.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Modelar o problema físico de transferência simultânea de calor e massa, baseado no sistema de equações de Luikov, considerando os parâmetros termofísicos variáveis no tempo e aplicar a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para resolver as equações;
- Realizar uma análise da influência sobre a temperatura e a umidade, dos parâmetros adimensionais da formulação de Luikov;
- Fazer comparações entre o modelo considerando os parâmetros constantes[3] e o modelo do presente trabalho.

1.2 Metodologia

- Primeiramente será entendido o processo de secagem como um problema de transferência de calor e de massa[2], o qual será representado pelo modelo de Luikov.
- Logo, será resolvido o problema via a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITG). Para isso será utilizado um programa desenvolvido previamente[3] e serão feitas pequenas modificações para considerar os números Lu , Bi_q e Bi_m variáveis.
- Finalmente, serão analisados os casos simulados.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Secagem é um processo de remoção de excesso de água (umidade) de um produto natural ou industrial, de maneira a atingir uma certa umidade desejada. A secagem de alimentos é particularmente utilizada para reduzir a ação de enzimas, de bactérias, de fermentos e de mofo. Adicionalmente, a secagem evita perdas pós-colheita, evita uso de sistemas de refrigeração para transporte ou armazenamento e agrega valor ao produto. Outra vantagem importante é que os alimentos desidratados podem ser reidratados, quase recuperando as condições nutritivas iniciais. Isso permite que os alimentos sazonais possam ser estocados, podendo ser consumidos durante o ano todo, evitando perdas na produção por excesso de produção[1].

Entre as diversas técnicas de secagem de alimentos encontra-se a secagem solar, a qual aproveita o calor fornecido pela radiação solar para remover a umidade dos alimentos. As temperaturas necessárias para secar alimentos são relativamente baixas ($\sim 70^{\circ}C$), tornando a energia solar uma alternativa para secar frutas, vegetais, grãos etc.[3]

2.1 Breve Revisão Histórica

A secagem por meio da energia solar é um dos métodos mais antigos existentes na história da humanidade. Na pré-história, a energia solar era utilizada para secar tijolos e para preservar alimentos. A instalação de secagem solar mais antiga conhecida foi encontrada no sul da França e se estima que seja do ano 8.000 A.C.[4]. Nessa instalação, a radiação solar se combinava com a ventilação natural. A instalação mais antiga de secagem por ar (não por exposição direta ao sol) foi encontrada no rio Hindu, o qual dá o nome à Índia, e se estima que seja do ano 2.600 A.C.[4]. O filósofo Grego Aristóteles (384-322 A.C.) foi a primeira pessoa do mundo ocidental a descrever teoricamente o fenômeno de secagem. Mais tarde, começou a ser utilizada para secar tijolos e outras coisas, mas os alimentos sempre foram expostos à radiação solar. A secagem “convencional” começou no século XVIII, porém, a secagem solar continua sendo utilizada para pequenas escalas.

2.2 Tipos de Secagem Solar

A secagem é uma das operações mais antigas de preservação de alimentos utilizada pelo homem. Durante este processo é necessário o fornecimento de calor

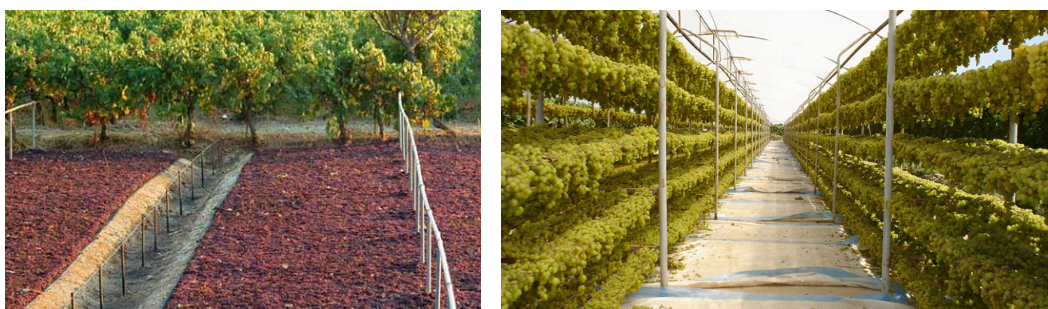
para remover a umidade do material, também deve haver um sorvedor de umidade para remover o vapor de água formado a partir da superfície do material a ser seco. Do ponto de vista de fornecimento de calor, os mecanismos básicos de transferência de calor empregados indicam os possíveis equipamentos necessários ao processo. A retirada do vapor de água formado na superfície do material é analisada do ponto de vista de movimento do fluido (mecânica dos fluidos), indicando também os possíveis equipamentos para esta finalidade[1].

Os produtos alimentícios podem ser secos por processos baseados na vaporização, sublimação, remoção de água por solventes ou na adição de agentes osmóticos. Os métodos de secagem utilizados em maior escala são os que tem como base a exposição do alimento a uma corrente de ar aquecida, sendo que a transferência de calor do ar para o alimento se dá basicamente por convecção. Incluem-se nesses processos a secagem ao sol e a secagem realizada em secadores[1].

Existem dois tipos de secagem solar:

1. **Secagem natural ou secagem solar direta:** se refere à secagem na qual a radiação solar aquece diretamente o produto. Existe convecção natural, a qual é fundamental no processo. Existem dois tipos:
 - Ao ar livre
 - Através de uma cobertura transparente

É uma técnica muito usada para secagem de uvas, de figos e de outras frutas. As frutas devem ser bem espalhadas, formando uma camada fina, conforme a Figura 1(a). Mesmo assim, é preciso mexer para evitar apodrecimento das frutas que ficam no fundo, sem receber radiação solar nem ventilação. O processo pode demorar entre 10 e 30 dias. Um processo similar é o apresentado na Figura 1(b), onde a uva é pendurada, conseguindo aproveitar melhor a superfície disponível para a secagem.



(a) Uva passa [5]

(b) Uva passa pendurada [6]

Figura 1. Secagem direta

As vantagens desta técnica são principalmente o baixo custo inicial, pois não é preciso investir em equipamentos; e os baixos custos de operação, pois não é necessária mão de obra qualificada.

A técnica tem mudado muito pouco desde o seu uso pre-histórico. O fato de obter energia gratuita do Sol é contrastado com muitas desvantagens, as quais afetam não somente a quantidade, mas também a qualidade da produção[7]. Entre as desvantagens, é possível mencionar a alta dependência das condições do vento, tais como velocidade e umidade relativa; o processo depende da experiência dos operários, a qual pode ser precária; isso faz com que não seja possível ter um controle de qualidade final adequado do produto; o processo é bastante lento; finalmente, existem perdas associadas a fatores climáticos, tais como fermentação, mofo etc., e a fatores locais, tais como ataques de insetos, de roedores, de pássaros etc.

A secagem solar direta ainda é usada para secar alguns tipos de uvas em países como Grécia[8], Austrália e Índia[9], e para secar pêssegos na África do Sul[10], entre outros.

2. **Secagem indireta:** na qual o princípio da secagem é a convecção. As tecnologias de secagem solar indiretas são relativamente novas em comparação com as tecnologias de secagem direta. Ainda não está padronizada nem é comercializada, o que quer dizer que cada pessoa deve construir seu sistema. Existem diversos tipos de secadores indiretos[1], dependendo do produto a secar. Na Figura 2 se apresenta um secador solar indireto.



Figura 2. Secagem indireta[11]

O ar à temperatura ambiente entra por (1) e passa pelo aquecedor solar (2). Logo entra à câmara pelo ponto (3), onde pode ser sobraquecido por meio de uma resistência elétrica. Finalmente sobe pela câmara (4) e sai pela chaminé (5).

Dentre as vantagens, podem-se mencionar a alta taxa de secagem (onde a secagem demora de 15 a 30 horas); capacidade de controlar certos parâmetros, tais como a velocidade do vento e a temperatura; isso faz com que as perdas sejam pequenas; não requer grandes áreas, pois podem ser feitas várias camadas; por último, sistemas de secagem indireta são flexíveis, podendo ser úteis para diversos tipos de produtos [7].

A única desvantagem está associada ao maior custo, pois o capital pode ser alto [7].

2.3 Condições de Secagem

Uma secagem de boa qualidade não deve afetar cor, sabor, textura nem valor nutricional. Para frutas, a secagem direta, ao ar livre, funciona bem, devido ao alto conteúdo de açúcar e ácido. Entretanto, para vegetais, a secagem direta não é favorável, pois têm um baixo conteúdo de açúcar e ácido.

Para obter um produto de boa qualidade, é preciso expor o alimento à condições adequadas de temperatura, velocidade e umidade do ar etc. As condições dependem do alimento que vai ser secado, porém, em geral, as temperaturas variam entre 40 e 70°C [12]. Usualmente, é preciso retirar entre 80 e 90% da umidade dos alimentos[13].

Se a temperatura for acima da adequada, o alimento queimará na superfície e ficará com umidade alta no interior. Na Figura 3(a) se mostra o resultado de uma secagem nas condições adequadas: banana passa dourada. Na Figura 3(b) se apresenta o resultado de uma secagem em condições inadequadas: um produto queimado.



(a) Condições adequadas



(b) Condições inadequadas

Figura 3. Banana passa[14]

2.4 Princípios de Secagem

2.4.1 Mecanismos Físicos

Na secagem de alimentos ocorrem simultaneamente transferência de massa, neste caso umidade, desde o interior do alimento para o exterior, e transferência de calor, desde o ar quente para o interior do alimento. A seguir se descrevem os detalhes de ambas transferências e qual é o mecanismo que predomina em cada uma delas. Na Figura 4, mostra-se um esquema considerando o alimento como uma placa infinita unidimensional (os fluxos ocorrem somente de dentro para fora ou vice-versa). As setas azuis representam a transferência de umidade (massa) e as vermelhas, a transferência de calor.

- Transferência de umidade (massa)
 - Interior \rightarrow superfície (1)
 - * Difusão de massa
 - Superfície \rightarrow ar (2)
 - * Convecção de massa com evaporação
- Transferência de calor
 - Ar \rightarrow superfície (3)
 - * Convecção de calor
 - Superfície \rightarrow interior (4)

* Condução de calor

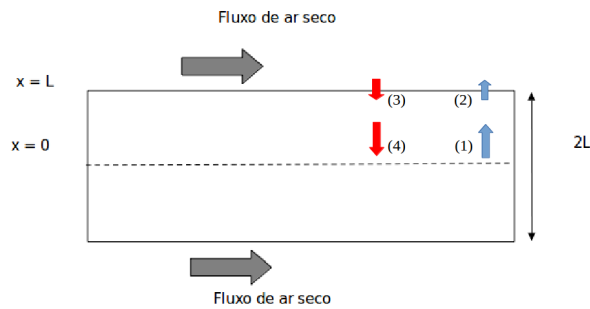


Figura 4. Meio poroso capilar unidimensional[3]

2.4.2 Taxa de Secagem

Está relacionado à umidade presente no alimento, o qual pode ser expresso em relação ao material úmido ou em relação ao material seco. A umidade se calcula da seguinte forma [15]:

- Material úmido (W)

$$W = \frac{m_w}{m_w + m_d} (\text{kg por kg de mistura}) \quad (1)$$

- Material seco (Y_s)

$$Y_s = \frac{m_w}{m_d} (\text{kg por kg de material seco}) \quad (2)$$

Onde m_w representa a massa de água e m_d representa a massa seca.

A taxa com a qual a umidade será extraída é determinada por diversos parâmetros, entre os que se encontram:

- Temperatura do produto
- Umidade do produto
- Temperatura do ar
- Umidade relativa do ar
- Velocidade do ar

Na Figura 5 apresenta-se um exemplo de taxa de secagem em função do tempo.

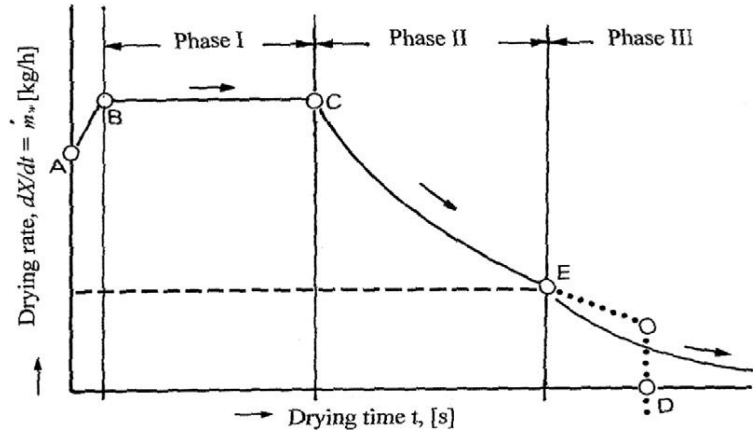


Figura 5. Fases da secagem[1]

Pode-se observar que a secagem se desenvolve em três fases:

- Fase I:
 - Taxa constante
 - Superfície saturada de vapor
 - Evaporação contínua
- Fase II:
 - Taxa decrescente
 - Superfície não saturada de vapor
 - Difusão de umidade controlada pelo movimento interno de água
- Fase III:
 - Umidade decrescente, até atingir o equilíbrio
 - A secagem termina

Como foi mencionado anteriormente, o mecanismo que governa a transferência de umidade no interior do alimento é a difusão de massa, a qual é estudada pela lei de Fick, que diz que a taxa de transferência de umidade ($\vec{J}_{umidade}$, medida em $[\frac{1}{s}]$) é proporcional (mediante a constante $D_{umidade}$, medida em $[\frac{m}{s}]$) ao gradiente de concentração de umidade ($\vec{\nabla} c_{umidade}$, medido em $[\frac{1}{m}]$), na direção contrária, pois o vetor gradiente aponta para onde a concentração é maior e o vetor de fluxo de umidade aponta para onde a concentração é menor, conforme a equação (3).

$$\vec{J}_{umidade} = -D_{umidade} \cdot \vec{\nabla} c_{umidade} \quad (3)$$

Quanto maior for a diferença de umidade entre a superfície do alimento e as regiões vizinhas, maior será o fluxo de transferência da mesma. Portanto, estas últimas terão uma grande capacidade para repor a umidade que foi evaporada nas partículas da superfície. Portanto, a primeira fase da secagem é contínua (Figura 5), pois toda a umidade que está sendo evaporada é repostada pelas partículas vizinhas.

Na medida em que as partículas internas vão cedendo a sua umidade para as partículas da superfície, o gradiente de umidade vai decrescendo, ocasionando a diminuição do fluxo de transferência da mesma. Na segunda fase da secagem (Figura 5), as partículas vizinhas às da superfície não são capazes de repor toda a umidade que está sendo evaporada. Conseqüentemente, a taxa de secagem deixa de ser contínua e diminui.

Finalmente, na terceira fase da Figura 5, o gradiente de umidade é tão baixo, que praticamente não existe mais difusão. Portanto, as partículas da superfície deixam de receber umidade e a secagem termina.

2.5 Tecnologias de Secagem Solar

Existem diversos tipos de secadores e a escolha de um determinado tipo é ditada pela: natureza do produto que vai ser seco; uso final que se deseja dar ao produto processado; fator econômico e condições de operações.

2.5.1 Secadores Solares

Existem muitos tipos de secadores solares. Em geral, são dispositivos relativamente simples e muitas vezes são construídos com base na experiência, a qual determinará o nível de sofisticação. Os secadores solares podem ser divididos em dois grupos: passivos e ativos.

Apesar de existir variadas configurações, elas consistem praticamente das mesmas partes:

- Espaço onde o produto será secado;
- Sistema de aquecimento de ar;
- Sistema de circulação de ar;

- Sistema de medição e controle;
- Partes auxiliares;
 - Canos;
 - Medidores de velocidade;
 - Medidores de umidade;
 - Termômetros;
 - etc.

- **Secadores passivos**

Aquecidos diretamente pelo Sol, com ou sem convecção natural. Nas Figuras 6 e 7 se mostram alguns tipos de secadores passivos. As superfícies denotadas com a letra “a” correspondem a superfícies transparentes, onde a radiação solar entra para aquecer o ar. O ar circula pelo secador conforme indicado pelas setas no interior. É importante observar que as superfícies aparecem orientadas para o sul, devido a que a referência é européia. No caso dos países do hemisfério sul, a orientação das superfícies transparentes deve ser para o norte se a região encontra-se abaixo do trópico de Capricórnio. Se a região encontra-se entre o Equador e o Trópico, a orientação das superfícies transparentes depende da estacionalidade do alimento que vai ser secado, pois tem um período em que o Sol estará para o Norte e outro em que o Sol estará para o Sul.

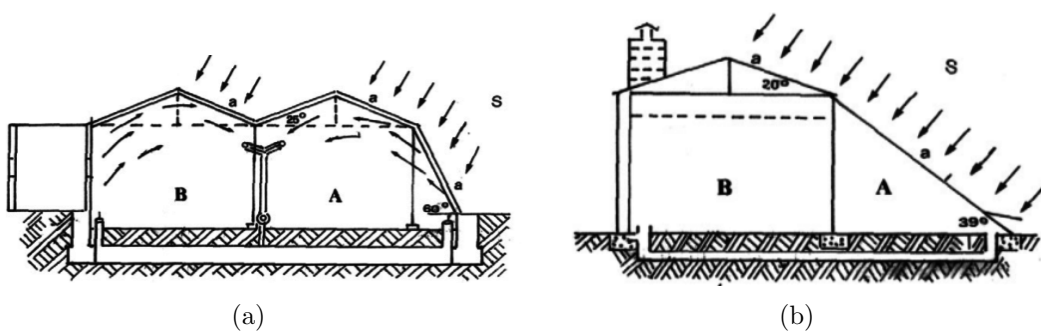


Figura 6. Secador tipo “estufa” [1]

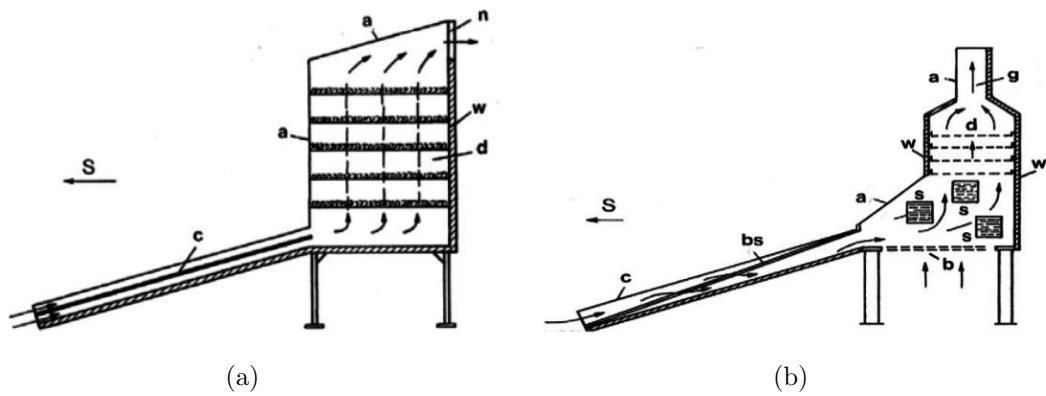


Figura 7. Secador tipo “prateleiras” [1]

- **Secadores ativos**

Aquecidos por ar quente que circula por meio de um ventilador. Na Figura 8 são apresentados alguns exemplos de secadores ativos. As letras “a” (Figura 8(a)) e “c” (Figuras 8(b), 8(c) e 8(d)) representam as superfícies transparentes. Na figura 8(a), a letra “b” representa o ventilador, o qual é responsável de gerar uma diferença de pressão, de maneira que o ar que foi aquecido na região superior desca. Na Figura 8(b), o ventilador é representado pela letra “e”, e faz com que o ar aquecido na região “c” circule entre as prateleiras (“d”). Nas Figuras 8(c) e 8(d), o ventilador é representado pela letra “d”, e faz com que o ar aquecido na região superior do secador, desca.

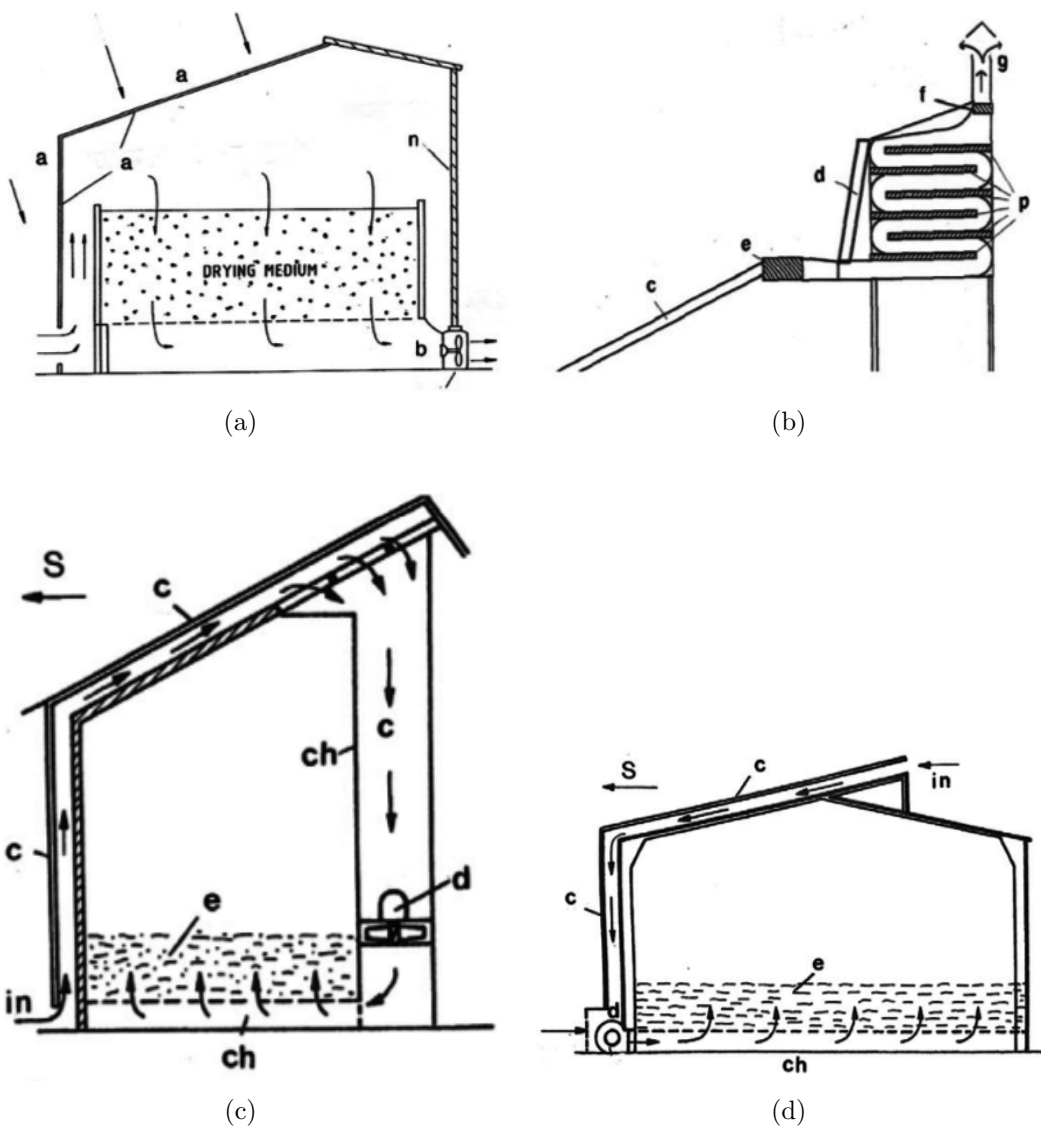


Figura 8. Secadores ativos[1]

O Centro de Energias Alternativas e Renováveis (CEAR) possui um secador solar ativo similar ao da Figura 8(b). Nas Figuras 9(a) e 9(b), podem-se ver a câmara de secagem. Na Figura 9(c) se mostra a área onde o ar é aquecido pelo Sol.

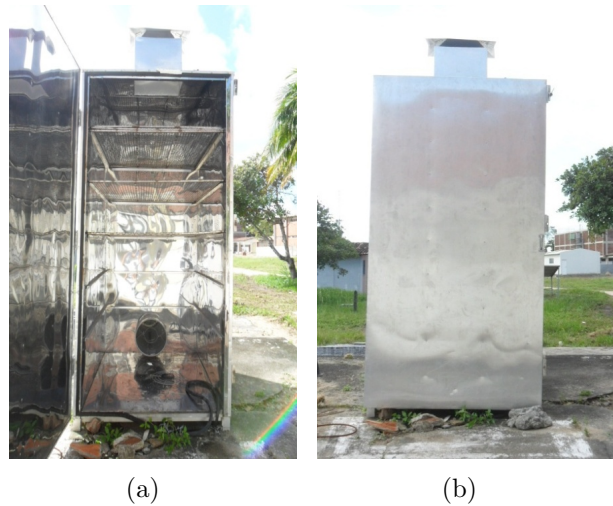


Figura 9. Secador CEAR[3]

2.6 Modelo de Luikov

O modelo utilizado para simular o processo de secagem de alimentos no presente trabalho foi desenvolvido por Alexei Vasilievich Luikov (1910 - 1974)[2]. O modelo de Luikov se destaca sobre os outros por considerar as transferências de calor e de massa como um problema acoplado, se aproximando mais da realidade do que os modelos que consideram as transferências de calor e massa como problemas separados. Porém, é um modelo bastante complexo para se resolver[3]. No modelo de Luikov, o alimento é representado como um meio poroso seco, cujas regiões livres contém água líquida ou vapor. As hipóteses do modelo são as seguintes:

- As temperaturas do líquido, vapor e meio seco são iguais em cada elemento de volume

- As mudanças de fases correspondem à transição de líquido em vapor e vice-versa
- Massa do vapor desprezível em relação à massa de líquido
- Reações químicas não são consideradas
- Variações na porosidade e volume desprezíveis

Também são definidos os seguintes subíndices para diferenciar as propriedades dos diferentes elementos presentes no alimento:

- $i = 0 \rightarrow$ matriz porosa (seca)
- $i = 1 \rightarrow$ vapor
- $i = 2 \rightarrow$ líquido

Assim, por exemplo, m_0 se refere à massa da matriz porosa seca, m_1 se refere à massa de vapor e m_2 se refere à massa de água líquida presente em um certo elemento de volume.

A estratégia para deduzir o sistema de equações de Luikov será combinar a lei de conservação de massa e a lei de conservação da energia, com a finalidade de obter um sistema de equações que considere ambas leis de forma simultânea.

2.6.1 Conservação da Massa

Considerando um elemento de volume como o da figura 10, a conservação da massa em um elemento de volume pode escrever-se da seguinte maneira[2]:

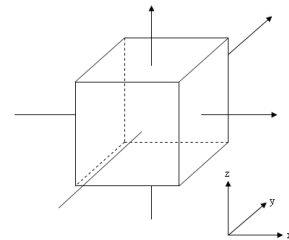


Figura 10. Elemento de volume [36]

$$\frac{\partial(u_i\rho)}{\partial t} = -div\left(\overrightarrow{j_{i(dif)}} + \overrightarrow{j_{i(mol)}}\right) + J_i \quad (4)$$

onde

- u_i corresponde à concentração da espécie i (neste caso, unidade)
- ρ é a massa volumétrica do elemento de volume ($[\frac{kg}{m^3}]$)
- $\overrightarrow{j_{i(dif)}}$ é a transferência por difusão ($[\frac{kg}{m^2s}]$), a qual é governada pela lei de Fick
- $\overrightarrow{j_{i(mol)}}$ representa a transferência por escoamento molar ($[\frac{kg}{m^2s}]$), a qual se deve a um campo de velocidades
- J_i é a geração da substância i ($[\frac{kg}{m^3s}]$) devido a mudanças de fase

O produto entre a concentração da espécie i (u_i) e a densidade (ρ) corresponde à massa da espécie i presente no elemento de volume. Dessa maneira, o lado esquerdo da equação (4) representa a mudança da massa da espécie i . O primeiro termo do lado direito representa a vazão líquida que deixa a superfície do elemento de volume (ver Anexo A.1). Esta vazão pode ser por difusão, determinada pela lei de Fick, ou molar, determinada por um campo de velocidades. Finalmente, o segundo termo do lado direito corresponde à geração da espécie i , devido a mudanças de fases. É importante notar que o último termo tem unidade de massa e não de concentração.

Também é importante observar que a divergência é positiva quando o escoamento é “para fora” do elemento de volume. Portanto, na equação (4) é necessário antepor um sinal negativo, pois o lado esquerdo da equação é positivo quando a massa aumenta, o que quer dizer que o lado esquerdo é positivo quando entra massa no elemento de volume, enquanto a divergência do lado direito da equação tem o comportamento contrário.

A título de exemplo, a seguir será desenvolvido um cálculo para determinar o valor do escoamento molar ($\overrightarrow{j_{i(mol)}}$), presente na equação (4). Com um raciocínio similar, é possível calcular todos os termos da equação [2].

• Escoamento molar

Para determinar o valor do escoamento molar, será necessário fazer as seguintes considerações:

- O escoamento por unidade de superfície é devido a um campo de velocidades, o qual é representado por um único vetor, \vec{V} , dentro de cada elemento de volume;
- O elemento é representado por um meio poroso;

- Existem várias espécies dentro de um elemento de volume, as quais correspondem a:
 - * Matriz porosa seca ($i = 0$);
 - * Vapor ($i = 1$);
 - * Água líquida ($i = 2$).

- **Escoamento por unidade de superfície**

Será feito o cálculo do escoamento molar para o volume de controle da figura 11, o qual tem uma superfície ΔA e um comprimento Δx .

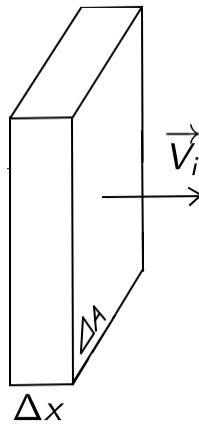


Figura 11. Volume de controle

Assumindo que ρ e V_i são conhecidos, pode-se deduzir que o deslocamento Δx de uma partícula corresponde a (5)

$$\Delta x = V_i \cdot \Delta t \quad (5)$$

Por outro lado, o volume do elemento é definido como (6)

$$V_i = \Delta A \cdot \Delta x \quad (6)$$

Portanto, substituindo (5) em (6) se obtém (7)

$$V_i = \Delta A \cdot V_i \cdot \Delta t \quad (7)$$

A densidade da substância i é definida como se mostra na equação (8)

$$\rho_i = \frac{m_i}{V_i} \quad (8)$$

Substituindo (7) em (8) se obtém (9)

$$\rho_i = \frac{m_i}{\Delta A \cdot V_i \cdot \Delta t} \quad (9)$$

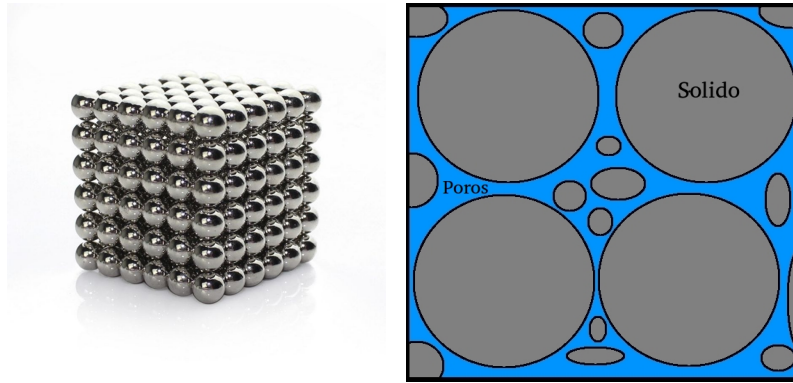
Lembrando que o se quer calcular é o escoamento por unidade de superfície, a equação (9) pode se reordenar como se mostra em (10)

$$\frac{m_i}{\Delta A \cdot \Delta t} = \rho_i \cdot V_i \quad (10)$$

onde o lado esquerdo da equação (10) corresponde justamente ao escoamento por unidade de superfície, da espécie i .

– Meio poroso

Um meio poroso pode ser modelado de diversas maneiras. Na figura 12 se apresentam dois tipos. O do lado esquerdo é o modelo mais elemental, o qual considera que o material é representado por esferas do mesmo tamanho, localizadas uma do lado da outra. O modelo do lado direito, do qual é mostrado um corte, é mais complexo pois considera diferentes tipos de formas e tamanhos.



(a) Meio poroso [37]

(b) Meio poroso (corte)

Figura 12. Modelos de meio poroso

Se define como **porosidade superficial**, Π , a razão entre a superfície dos poros (A_p) e a superfície total (A_T).

$$\Pi = \frac{A_p}{A_T} \quad (11)$$

Se considerará que o valor da porosidade superficial é conhecido.

– **Diversidade de espécies**

Como foi mencionado anteriormente, dentro do elemento de volume coexistem várias espécies, a saber: matriz porosa seca, vapor e água líquida. Se define b_i como a razão entre a superfície ocupada pela espécie i , e a superfície total (equação (12)).

$$b_i = \frac{A_i}{A_T} \quad (12)$$

Pode-se deduzir facilmente que

$$\sum_i b_i = 1 \quad (13)$$

Para calcular o escoamento molar através de uma superfície, basta multiplicar os resultados das equações (10), (11) e (12), obtendo (14).

$$\overrightarrow{j_{i(mol)}} = \Pi b_i \rho_i \overrightarrow{V}_i \quad (14)$$

Desprezando as mudanças de volume ($\rho = \rho_0 = cte$), a conservação da massa pode escrever-se como se mostra na equação (15):

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} = -div \left(\overrightarrow{j_{i(dif)}} + \Pi b_i \rho_i \overrightarrow{V}_i \right) + J_i \quad (15)$$

2.6.2 Conservação da Energia

A conservação da energia em um elemento de volume pode escrever-se como se mostra na equação (16)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(h_0 \rho_0 + \sum_i h_i \rho_0 u_i \right) = -div \left[\overrightarrow{j}_q + \sum_i h_i \left(\overrightarrow{j_{i(dif)}} + \Pi \rho_i b_i \overrightarrow{V}_i \right) \right] \quad (16)$$

onde

- h_0 é a entalpia específica da matriz porosa seca ($[\frac{J}{kg}]$)
- h_i é a entalpia específica da espécie i ($[\frac{J}{kg}]$)
- \overrightarrow{j}_q corresponde à densidade de fluxo de calor por condução ($[\frac{J}{m^2s}]$)
- $h_i \overrightarrow{j_{i(dif)}}$ representa o calor que sai junto com a espécie i , por difusão ($[\frac{J}{m^2s}]$)
- $h_i \Pi \rho_i b_i \overrightarrow{V}_i$ representa o calor que sai junto com a espécie i , por escoamento ($[\frac{J}{m^2s}]$)

O produto entre a entalpia específica h_i , a densidade ρ_0 e a concentração u_i corresponde à energia contida na espécie i , por unidade de volume. Ao ser seca, a matriz porosa ($i = 0$) não possui concentração. A energia contida nela é simplesmente o produto entre h_0 e ρ_0 . É importante observar que este produto tem unidades de energia sobre volume, o que quer dizer que a equação considera um elemento de volume. Portanto, o lado direito da equação (16) corresponde às mudanças de energia dentro do elemento de volume, no tempo.

O primeiro termo do lado direito da equação (16) representa o calor que sai por condução, através da superfície do elemento de volume. O segundo termo

corresponde ao calor que sai junto com a difusão da espécie i . Finalmente, o terceiro termo é o calor que sai junto com o escoamento da espécie i .

- **Densidade de fluxo de calor por condução**

É sabido que a transferência de calor por condução é governada pela lei de Fourier, a qual é análoga à lei de Fick para difusão. A transferência de calor por condução é proporcional ao gradiente de temperaturas. Pode-se observar que o gradiente de temperaturas aponta na direção da maior temperatura, enquanto a transferência de calor ocorre no sentido contrário, razão pela qual será necessário colocar um sinal negativo antes do gradiente. Portanto, a transferência de calor por condução se escreve conforme a equação (17).

$$\vec{j}_q = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (17)$$

onde

- λ corresponde ao coeficiente de condução total de calor ($[\frac{J}{Kms}]$)
- $\vec{\nabla}$ é o operador gradiente, o qual, para coordenadas cartesianas se escreve como segue

$$\vec{\nabla} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

- T é a temperatura ($[K]$)

Juntando as equações de conservação de massa e de conservação de volume[2], se obtém as equações (19) e (19) (para mais detalhes, ver anexo A.2).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla a_m \nabla u + \nabla a_m \delta \nabla T \quad (18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla a \nabla T + \varepsilon \frac{r_{21}}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (19)$$

onde

- a_m é o coeficiente de difusão ($[\frac{m^2}{s}]$)
- δ é o coeficiente termogradiente ($[K^{-1}]$)

- ε corresponde à fração da mudança de umidade correspondente à evaporação (adimensional)
- a é o coeficiente de difusividade térmica ($[\frac{m^2}{s}]$)
- r_{21} é o calor latente de evaporação ($[\frac{J}{kg}]$)

O coeficiente de difusão e o calor latente de evaporação são amplamente conhecidos e, portanto, não precisam ser explicados. Porém, o coeficiente termogradiante e a fração da mudança de umidade correspondente à evaporação serão explicados a seguir.

- **Coefficiente termogradiante**

Se define como a razão entre a queda de umidade (Δu) e a queda de temperatura (ΔT) em regime permanente e sem transferência de umidade ($j = 0$). A umidade cai somente por mudança de fase.

$$\delta_u = \left(\frac{\Delta u}{\Delta T} \right)_{j=0} \quad (20)$$

Devido ao fato que o sistema de equações de Luikov acopla a transferência de calor com a transferência de massa, o coeficiente termogradiante é muito importante para definir a interrelação entre o conteúdo de umidade e a temperatura.

- **Fração de mudança de umidade correspondente à evaporação**

Como foi estudado na seção 2.6.1, as espécies (vapor, água líquida) podem entrar ou sair do elemento de volume, seja por difusão ou por escoamento. Entretanto, também podem ser geradas devido a mudanças de fase.

O coeficiente ε corresponde à porção de água líquida perdida em um elemento de volume, que foi evaporada. Por exemplo, se $\varepsilon = 0$, quer dizer que não houve evaporação e que toda a água perdida foi por difusão ou escoamento. Se $\varepsilon = 1$, toda a água líquida perdida foi evaporada e não houve difusão nem escoamento.

O modelo de Luikov tem sido usado para diversas aplicações. Tem sido desenvolvidos programas para simular a secagem[25] e tratamento a alta temperatura[26][27] de madeiras, os quais, comparados com resultados experimentais, mostraram ser realistas. Também foram feitas modificações no modelo quando aplicado à secagem de madeiras, obtendo melhoras consideráveis[28][29]. Tem sido feitas avaliações dos fatores de influência em secagem de tijolos, obtendo resultados satisfatórios quando comparados com resultados experimentais[30]. Foram feitas simulações para secagem de maçãs, com o objetivo de avaliar a influência da pressão e a temperatura do ar quente[31], obtendo resultados com erros menores a 2%. Também foi feita uma modelagem que foi comparada com dados experimentais, os quais foram obtidos medindo o conteúdo de umidade com Raios Gamma[32].

2.7 Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT)

Publicado por Mikhailov e Özisik [17], a GITT é um método híbrido analítico-numérico de resolução de sistemas complexos, que consiste em transformar o problema representado por uma equação diferencial parcial (e provavelmente não linear) em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Em alguns casos, o sistema pode ser resolvido de forma analítica e, em outros, de forma numérica, obtendo uma solução aproximada. A qualidade da solução dependerá do critério de convergência e da discretização utilizada.

De maneira resumida, a GITT tem os seguintes passos:

- Escolher um problema auxiliar apropriado, o qual deve conter o máximo possível de informações sobre o problema original, evitando problemas computacionais;
- Desenvolver um par transformada-inversa, a partir da propriedade de ortogonalidade das autofunções;
- Aplicar a transformação integral da equação diferencial parcial original, resultando em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acoplado;
- Truncar o sistema diferencial ordinário resultando em uma ordem suficientemente grande, resolvendo-o através de procedimentos numéricos;
- Obter os potenciais originais utilizando a fórmula de inversão.

A GITT tem sido bastante usada para resolver equações de transferência de calor e de massa em diversas áreas, demonstrando ser uma ferramenta que se comporta

bem neste tipo de problemas. Tem sido usada em modelos de transferência de massa das espécies envolvidas nas reações entre óleo de soja e metanol em reatores de biodiesel, e comparadas com outras técnicas de resolução, obtendo resultados satisfatórios[18]. A GITT tem sido comparadas com métodos analíticos para transferência de calor por condução e convecção em canais, obtendo excelentes resultados, demonstrando a confiabilidade da técnica[19].O mesmo modelo tem sido expandido para aplicações em canais de geometrias arbitrárias[20]. Foi feito um estudo de transferência de calor em microcanais, considerando escoamento laminar, simulando intercambiadores de calor[21], e os resultados foram comparados com os fornecidos pelo software comercial COMSOL, concluindo que as soluções são muito similares. A GITT tem sido usada para resolver problemas de escoamento considerando números de Reynold pequenos e paredes corrugadas, analisando escoamento e transferência de calor[22]. A GITT foi usada para resolver problemas de transferência de calor e de massa em meios porosos, representadas pelo modelo de Luikov, com geometria cilíndrica[23] e esférica [24]. Também tem sido usada para transferência de calor e massa em modelos de secagem de alimentos[3].

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Problema físico

O problema físico considerado aqui envolve um processo de secagem solar indireta de uma placa porosa. Dentro da câmara de secagem os dois lados da amostra são expostos a um fluxo de ar seco à temperatura T_s , conforme ilustrado na figura 13.

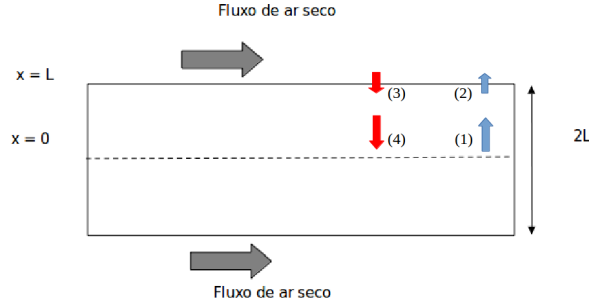


Figura 13. Meio poroso capilar unidimensional[3]

3.2 Modelagem da Transferência Simultânea de Calor e de Massa

Como foi discutido na seção 2.6, o problema de secagem de alimentos pode ser representado pelo seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla a_m \nabla u + \nabla a_m \delta \nabla T \quad (21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla a \nabla T + \varepsilon \frac{r_{21}}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (22)$$

Considerando o modelo de placa unidimensional infinita, o modelo é representado pelas equações (23) e (24).

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a_m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a_m \delta \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (23)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \left(a + \frac{\varepsilon a_m \delta r_{21}}{c} \right) \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon a_m \delta \lambda}{c} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (24)$$

A escolha das condições iniciais e de contorno são muito importantes, pois definirão o método de resolução do sistema de equações.

Condições iniciais

Para $0 < x < L$,

$$T(x, 0) = T_0 \quad (25)$$

$$u(x, 0) = u_0 \quad (26)$$

onde T_0 e u_0 correspondem à temperatura inicial (em $[K]$) e umidade inicial (em $[\frac{kg_{agua}}{kg_{material\ seco}}]$), respetivamente.

Condições de contorno

Para $x = 0$,

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (28)$$

Para $x = L$,

$$k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} + h_c [T(L, t) - T_s] + (1 - \epsilon) \frac{r_{21} h_m}{c_m} [u(L, t) - u^*] = 0 \quad (29)$$

$$k_m \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} + \delta k_m \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} + h_m [u(L, t) - u^*] = 0 \quad (30)$$

onde:

- $a = \frac{k}{\rho c}$ é o coeficiente de difusividade térmica ($[\frac{m^2}{s}]$)
- $a_m = \frac{k_m}{\rho c_m}$ é o coeficiente de difusão de massa ($[\frac{m^2}{s}]$)
- $h_m = h'_m c_m \rho$ é o coeficiente de transferência de massa
- u^* é a umidade de equilíbrio do sistema ($[\frac{kg_{agua}}{kg_{material\ seco}}]$).

O primeiro termo da equação (29) representa a contribuição da transferência de calor no interior do alimento; o segundo expressa a quantidade de calor fornecido pela superfície; o último é a contribuição de calor consumido na mudança de fase do líquido.

Na equação (30), o primeiro termo descreve a contribuição da transferência de umidade no interior do alimento, enquanto os dois últimos representam a contribuição da transferência de umidade devido ao efeito termogradiente e da transferência convectiva de umidade, respectivamente.

3.2.1 Adimensionalização das equações

Serão definidos os seguintes grupos adimensionais:

- Temperatura adimensional:

$$\Theta(X, \tau) = \frac{T(x, t) - T^*}{T_0 - T^*} \quad (31)$$

- Umidade adimensional

$$\Phi(X, \tau) = \frac{u(x, t) - u^*}{u_0 - u^*} \quad (32)$$

onde

$$X = \frac{x}{L} \quad \text{corresponde ao comprimento adimensional} \quad (33)$$

$$\tau = \frac{at}{L^2} \quad \text{corresponde ao tempo adimensional (número de Fourier)} \quad (34)$$

Devido ao fato de que a transferência de calor ocorre por convecção e condução, serão de utilidade os números de Biot para transferência de calor (Bi_q) e para transferência de massa (Bi_m), além do número de Luikov (Lu).

$$Bi_q = \frac{h_c L}{K} \quad \text{Número de Biot para transferência de calor} \quad (35)$$

$$Bi_m = \frac{h_m L}{K_m} \quad \text{Número de Biot para transferência de massa} \quad (36)$$

$$Lu = \frac{a_m}{a} \quad \text{Número de Luikov} \quad (37)$$

$$Ko = \frac{\lambda u_o - u^*}{c T_s - T_0} \quad \text{Número de Kossovich} \quad (38)$$

$$Pn = \delta \frac{T_s - T_0}{u_o - u^*} \quad \text{Número de Posnov} \quad (39)$$

Substituindo os grupos adimensionais anteriores nas equações (23), (24), (25), (26), (27), (28), (29) e (30), e reorganizando, se obtém o modelo adimensionalizado:

$$\frac{\partial \Theta(X, \tau)}{\partial \tau} = (1 + \varepsilon Lu Ko Pn) \frac{\partial^2 \Theta(X, \tau)}{\partial X^2} - \varepsilon Lu Ko \frac{\partial^2 \Phi(X, \tau)}{\partial X^2} \quad (40)$$

$$\frac{\partial \Phi(X, \tau)}{\partial \tau} = -Lu Pn \frac{\partial^2 \Theta(X, \tau)}{\partial X^2} + Lu \frac{\partial^2 \Phi(X, \tau)}{\partial X^2} \quad (41)$$

com as seguintes condições iniciais:

para $0 < X < 1$

$$\Theta(X, 0) = 0 \quad (42)$$

$$\Phi(X, 0) = 0 \quad (43)$$

e as seguintes condições de contorno:

para $\tau > 0$

$$\frac{\partial \Theta(0, \tau)}{\partial X} = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial \Phi(0, \tau)}{\partial X} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, \tau)}{\partial X} - Bi_q(1 - \Theta(1, \tau)) + (1 - \varepsilon)Bi_mKoLu(1 - \Phi(1, \tau)) = 0 \quad (46)$$

$$-\frac{\partial \Phi(1, \tau)}{\partial X} + Pn\frac{\partial \Theta(1, \tau)}{\partial X} + Bi_m(1 - \Phi(1, \tau)) = 0 \quad (47)$$

O sistema anterior pode ser reescrito, definindo os seguintes coeficientes:

$$K_{11} = (1 - \varepsilon)KoLuPn \quad (48)$$

$$K_{12} = -\varepsilonKoLu \quad (49)$$

$$K_{21} = -LuPn \quad (50)$$

$$K_{22} = Lu \quad (51)$$

$$(52)$$

3.3 Solução via Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT)

Com o decorrer do tempo tem sido desenvolvidas algumas modificações à técnica da transformada original, incluindo a aplicação de filtros, a qual acelera a convergência, diminuindo o custo computacional, e o balanço integral, que retém as informações do contorno em uma nova representação para a expansão[3].

Para o presente trabalho, se propõe o seguinte filtro[17]:

$$\Theta(X, \tau) = 1 + \Theta_h(X, \tau) \quad (53)$$

$$\Phi(X, \tau) = 1 + \Phi_h(X, \tau) \quad (54)$$

Assim, o sistema de equações fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Theta_h(X, \tau)}{\partial \tau} = K_{11} \frac{\partial^2 \Theta_h(X, \tau)}{\partial X^2} + K_{12} \frac{\partial^2 \Phi_h(X, \tau)}{\partial X^2} \quad (55)$$

$$\frac{\partial \Phi_h(X, \tau)}{\partial \tau} = K_{21} \frac{\partial^2 \Theta_h(X, \tau)}{\partial X^2} + K_{22} \frac{\partial^2 \Phi_h(X, \tau)}{\partial X^2} \quad (56)$$

com as seguintes condições iniciais:

para $0 < X < 1$

$$\Theta_h(X, 0) = -1 \quad (57)$$

$$\Phi_h(X, 0) = -1 \quad (58)$$

e as seguintes condições de contorno:

para $\tau > 0$

$$\frac{\partial \Theta_h(0, \tau)}{\partial X} = 0 \quad (59)$$

$$\frac{\partial \Phi_h(0, \tau)}{\partial X} = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\partial \Theta_h(1, \tau)}{\partial X} + Bi_q \Theta_h(1, \tau) = Bi_m^{**} \Phi_h(1, \tau) \quad (61)$$

$$\frac{\partial \Phi_h(1, \tau)}{\partial X} + Bi_m^* \Phi_h(1, \tau) = -Bi_q Pn \Theta_h(1, \tau) \quad (62)$$

onde,

$$Bi_m^* = Bi_m [1 - (1 - \varepsilon) KoLuPn] \quad (63)$$

$$Bi_m^{**} = (1 - \varepsilon) Bi_m KoLu \quad (64)$$

O sistema definido pelas equações (55) - (62) será resolvido seguindo a GITT. Como já foi falado na seção 2.7, a GITT tem os seguintes passos:

- Escolher um problema auxiliar apropriado, o qual deve conter o máximo possível de informações sobre o problema original, evitando problemas computacionais;

- Desenvolver um par transformada-inversa, a partir da propriedade de ortogonalidade das autofunções;
- Aplicar a transformação integral da equação diferencial parcial original, resultando em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acoplado;
- Truncar o sistema diferencial ordinário resultando em uma ordem suficientemente grande, resolvendo-o através de procedimentos numéricos;
- Obter os potenciais originais utilizando a fórmula de inversão.

3.3.1 Primeiro passo

O primeiro passo da GITT consiste em escolher um sistema auxiliar apropriado. Para este caso, serão escolhidos problemas do tipo Sturm-Liouville, para ambas variáveis[17].

Dessa maneira, o problema auxiliar para a transferência de calor é:

$$\frac{d^2\Psi_i(X)}{dX^2} + \mu_i^2\Psi(X) = 0 \quad (65)$$

$$\frac{d\Psi_i(0)}{dX} = 0 \quad (66)$$

$$\frac{d\Psi_i(X)}{dX} + Bi_q\Psi_i(1) = 0 \quad (67)$$

onde as autofunções são as seguintes[17]:

$$\Psi_i(X) = \cos(\mu_i X) \quad (68)$$

e as equações transcendentais para obter os autovalores, μ_i , são[17]:

$$\mu_i \operatorname{tg}(\mu_i) = Bi_q \quad (69)$$

Propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \Psi_i \Psi_j dX = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ M_i & i = j \end{cases} \quad (70)$$

$$\text{Norma} \longrightarrow M_i = \int_0^1 \Psi_i^2 dX = \frac{1}{2} \frac{\mu_i^2 + Bi_q^2 + Bi_q}{\mu_i^2 + Bi_q^2} \quad (71)$$

Analogamente, o problema auxiliar para a transferência de massa é:

$$\frac{d^2\varphi_i(X)}{dX^2} + \lambda_i^2\varphi_i(X) = 0 \quad (72)$$

$$\frac{d\varphi_i(X)}{dX} = 0 \quad (73)$$

$$\frac{d\varphi_i(X)}{dX} + Bi_q\varphi_i(1) = 0 \quad (74)$$

onde as autofunções são as seguintes[17]:

$$\varphi_i(X) = \cos(\lambda_i X) \quad (75)$$

e as equações transcendentais para obter os autovalores, λ_i , são[17]:

$$\lambda_i \operatorname{tg}(\lambda_i) = Bi_m \quad (76)$$

Propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \varphi_i \varphi_j dX = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ N_i & i = j \end{cases} \quad (77)$$

$$\text{Norma} \longrightarrow N_i = \int_0^1 \varphi_i^2 dX = \frac{1}{2} \frac{\lambda_i^2 + Bi_m^{*2} + Bi_m^*}{\lambda_i^2 + Bi_m^{*2}} \quad (78)$$

3.3.2 Segundo passo

O segundo passo consiste em encontrar os pares transformada-inversa para as equações definidas no primeiro passo. Para este tipo de equações, os pares são os seguintes:

- **Transferência de calor**

$$\text{Trasformada} \longrightarrow \bar{\Theta}_i(\tau) = \int_0^1 \bar{\Psi}_i(X) \Theta_h(X, \tau) dX \quad (79)$$

$$\text{Inversa} \longrightarrow \Theta_h(X, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\Psi}(X) \bar{\Theta}_i(\tau) \quad (80)$$

onde

$$\bar{\Psi}_i(X) = \frac{\Psi_i(X)}{\sqrt{M_i}} \quad \text{corresponde à autofunção normalizada.}$$

- **Transferência de massa**

$$\text{Trasformada} \longrightarrow \bar{\Phi}_i(\tau) = \int_0^1 \bar{\varphi}_i(X) \Phi_h(X, \tau) dX \quad (81)$$

$$\text{Inversa} \longrightarrow \Phi_h(X, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\varphi}(X) \bar{\Phi}_i(\tau) \quad (82)$$

onde

$$\bar{\varphi}(X) = \frac{\varphi(X)}{\sqrt{N_i}} \quad \text{corresponde à autofunção normalizada.}$$

3.3.3 Terceiro passo

O terceiro passo consiste em aplicar a transformada integral às equações diferenciais parciais, obtendo sistemas de equações diferenciais ordinárias. Assim, se aplica o operador $\int_0^1 \bar{\Psi}_i dX$ na equação (55) e o operador $\int_0^1 \bar{\Phi}_i dX$ na equação (56).

Dessa forma, as quantidades dos contornos $\Theta_h(1, \tau)$ e $\Phi_h(1, \tau)$ estão expressadas em termos dos potenciais transformados $\bar{\Theta}_i(1, \tau)$ e $\bar{\Phi}_i(1, \tau)$. Porém, não é recomendada a substituição direta das fórmulas da inversa dos contornos, devido que as condições de contorno não são necessariamente obedecidas pelas autofunções[34]. Para resolver este eventual problema, podem ser utilizadas equações de balanço integral[35].

- **Transferência de calor**

$$\begin{aligned} & \frac{d\bar{\Theta}_i(\tau)}{d\tau} + K_{11}\mu_i^2\bar{\Theta}_i(\tau) + K_{12}\mu_i^2 \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\bar{\Phi}_j(\tau) = \\ & K_{11}Bi_m^{**}\bar{\varphi}_i(1)\Phi_h(1, \tau) + K_{12}[(Bi_q - Bi_m^*)\bar{\varphi}(1)\Phi_h(1, \tau) - Bi_q Pn\bar{\varphi}(1)\Theta_h(1, \tau)] \quad (83) \end{aligned}$$

- **Transferência de massa**

$$\frac{d\bar{\Phi}_i(\tau)}{d\tau} + K_{22}\lambda_i^2\bar{\Phi}_i(\tau) + K_{21}\lambda_i^2\sum_{j=0}^{\infty}b_{ij}\bar{\Theta}_j(\tau) = K_{21}[(Bi_m^* - Bi_q)\bar{\varphi}_i(1)\Theta_h(1, \tau) + Bi_m^{**}\bar{\varphi}_i(1)\Phi_h(1, \tau)] - K_{22}Bi_qPn\bar{\varphi}(1)\Theta_h(1, \tau) \quad (84)$$

onde

$$\Theta_h(1, \tau) = -\frac{1}{Bi_q} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(c_j \frac{d\bar{\Theta}_j(\tau)}{d\tau} + koc_j^* \frac{d\bar{\Phi}_j(\tau)}{d\tau} \right) \right] \quad (85)$$

$$\Phi_h(1, \tau) = -\frac{1}{Bi_m K_{22}} \sum_{j=1}^{\infty} c_j^* \frac{d\bar{\Phi}_j(\tau)}{d\tau} \quad (86)$$

$$c_j = \int_0^1 \bar{\Psi}(X) dX = \frac{sen\mu_j}{\sqrt{M_j\mu_j}} \quad (87)$$

$$c_j^* = \int_0^1 \bar{\varphi}(X) dX = \frac{sen\lambda_j}{\sqrt{N_j\lambda_j}} \quad (88)$$

$$a_{ij} = \int_0^1 \bar{\Psi}_i(X) \bar{\varphi}_j(X) dX = \frac{\lambda_j \cos(\mu_i) sen(\lambda_j) - \mu_i \cos(\lambda_j) sen(\mu_i)}{\sqrt{M_i N_j} (\lambda_j^2 - \mu_i^2)} \quad (89)$$

$$b_{ij} = \int_0^1 \bar{\varphi}_i(X) \bar{\Psi}_j(X) dX = \frac{\lambda_i \cos(\mu_j) sen(\lambda_i) - \mu_j \cos(\lambda_i) sen(\mu_j)}{\sqrt{M_i N_j} (\lambda_i^2 - \mu_j^2)} \quad (90)$$

Integrando as equações (83) e (84) entre $X = 0$ e $X = 1$, se obtém:

- **Transferência de calor**

$$\frac{d\bar{\Theta}_i(\tau)}{d\tau} + K_{11}\mu_i^2\bar{\Theta}_i(\tau) + K_{12}\mu_i^2\sum_{j=0}^{\infty}a_{ij}\bar{\Phi}_j(\tau) = \bar{\Phi}_i(1)K_{oLu}[(Bi_m - \varepsilon Bi_q)\phi_h(q, \tau) + \varepsilon PnBi_q\Theta_h(1, \tau)] \quad (91)$$

- **Transferência de massa**

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Phi}_i(\tau)}{d\tau} + K_{22}\lambda_i^2\bar{\Phi}_i(\tau) + K_{21}\lambda_i^2 \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}\Theta_j(\tau) = \\ -\bar{\varphi}LuPn[Bi_m^*\Theta_h(1, \tau) + (1 - \varepsilon)KoLuBi_m\Phi_h(1, \tau)] \end{aligned} \quad (92)$$

3.3.4 Quarto passo

A solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (sistema transformado) é obtida a través de subrotinas.

3.3.5 Quinto passo

Para obter a solução do problema original, aplica-se a fórmula da inversa, dada pelas equações (80) e (82).

$$\begin{aligned} \Theta_h(X, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\Psi}(X)\bar{\Theta}_i(\tau) \\ \Phi_h(X, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\varphi}(X)\bar{\Phi}_i(\tau) \end{aligned}$$

3.4 Modelo computacional

Neste trabalho foram feitas pequenas modificações a um programa desenvolvido e validado previamente [3], com o objetivo de considerar Lu , Bi_q e Bi_m variáveis no tempo. O programa foi escrito em Fortran 90 e o sistema de equações diferenciais obtido pela GITT foi resolvido pela subrotina DIVPAG, da livraria numérica ISML. O controle de erro relativo foi definido em 10^{-8} .

Para considerar os parâmetros variáveis, o programa deve redefinir as equações que serão resolvidas para cada passo de tempo. Esse processo leva bastante tempo, fazendo que uma simulação de dois dias do processo de secagem demore aproximadamente uma semana. Portanto, por motivos de economia de tempo, foram simulados somente as primeiras duas horas do processo de secagem.

3.5 Estudo dos parâmetros adimensionais das equações de Luikov

Um dos objetivos específicos deste trabalho é considerar os parâmetros termofísicos variáveis no tempo. Foi considerado um caso base, com coeficientes constantes e seis casos com coeficientes variáveis. As propriedades do caso base se apresentam na tabela 1, enquanto as propriedades dos casos com coeficientes variáveis se apresentam nas tabelas 2 e 3.

Para representar a variação dos parâmetros adimensionais, se escolheram funções lineares, cujos valores são similares aos estudados em trabalhos anteriores[3].

Tabela 1. Propriedades dos casos analisados[3].

Propriedades	Caso base
L (m)	$2,0 \times 10^{-3}$
ρ (kg/m ³)	980
h_c (W/m ² K)	36,51
h_m (kg/m ² s ^o M)	$8,59 \times 10^{-7}$
k (w/mK)	0,5424
K_m (kg/ms ^o M)	$7,08 \times 10^{-10}$
c (J/kgK)	3350
c_m (kg/kg ^o M)	$3,0 \times 10^{-3}$
λ (J/Kg)	$2,3586 \times 10^6$
T_0 (°C)	24
T_{ar} (°C)	60
v_{ar} (m/s)	0,70
u_0 (kg/kg _{seco})	4
u^* (kg/kg _{seco})	0,20
a_m (m ² /s)	$2,41 \times 10^{-10}$
δ (kg/kg ^o C)	0,015
Pr	0,142
Ko	74,32
ε	0,3
Lu	0,0015
Bi_q	0,135
Bi_m	2,43

Tabela 2. Propriedades dos casos analisados.

Propriedades	Caso 1	Caso 2	Caso 3
L (m)	$2,0 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-3}$
ρ (kg/m ³)	980	980	980
h_c (W/m ² K)	36,51	36,51	36,51
h_m (kg/m ² s ^o M)	$8,59 \times 10^{-7}$	$8,59 \times 10^{-7}$	$8,59 \times 10^{-7}$
k (w/mK)	0,5424	0,5424	0,5424
K_m (kg/ms ^o M)	$7,08 \times 10^{-10}$	$7,08 \times 10^{-10}$	$7,08 \times 10^{-10}$
c (J/kgK)	3350	3350	3350
c_m (kg/kg ^o M)	$3,0 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^{-3}$
λ (J/Kg)	$2,3586 \times 10^6$	$2,3586 \times 10^6$	$2,3586 \times 10^6$
T_0 (°C)	24	24	24
T_{ar} (°C)	60	60	60
v_{ar} (m/s)	0,70	0,70	0,70
u_0 (kg/kg _{seco})	4	4	4
u^* (kg/kg _{seco})	0,20	0,20	0,20
a_m (m ² /s)	$2,41 \times 10^{-10}$	$2,41 \times 10^{-10}$	$2,41 \times 10^{-10}$
δ (kg/kg ^o C)	0,015	0,015	0,015
Pr	0,142	0,142	0,142
Ko	74,32	74,32	74,32
ε	0,3	0,3	0,3
Lu	$0,0015 + 0,00000004t$	$0,0015 - 0,00000004t$	0,0015
Bi_q	0,135	0,135	$0,135 + 0,00004t$
Bi_m	2,43	2,43	2,43

Tabela 3. Propriedades dos casos analisados.

Propriedades	Caso 4	Caso 5	Caso 6
L (m)	$2,0 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-3}$
ρ (kg/m ³)	980	980	980
h_c (W/m ² K)	36,51	36,51	36,51
h_m (kg/m ² s ^{°M})	$8,59 \times 10^{-7}$	$8,59 \times 10^{-7}$	$8,59 \times 10^{-7}$
k (w/mK)	0,5424	0,5424	0,5424
K_m (kg/ms ^{°M})	$7,08 \times 10^{-10}$	$7,08 \times 10^{-10}$	$7,08 \times 10^{-10}$
c (J/kgK)	3350	3350	3350
c_m (kg/kg ^{°M})	$3,0 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^{-3}$
λ (J/Kg)	$2,3586 \times 10^6$	$2,3586 \times 10^6$	$2,3586 \times 10^6$
T_0 (°C)	24	24	24
T_{ar} (°C)	60	60	60
v_{ar} (m/s)	0,70	0,70	0,70
u_0 (kg/kg _{seco})	4	4	4
u^* (kg/kg _{seco})	0,20	0,20	0,20
a_m (m ² /s)	$2,41 \times 10^{-10}$	$2,41 \times 10^{-10}$	$2,41 \times 10^{-10}$
δ (kg/kg ^{°C})	0,015	0,015	0,015
Pr	0,142	0,142	0,142
Ko	74,32	74,32	74,32
ε	0,3	0,3	0,3
Lu	0,0015	0,0015	0,0015
Bi_q	$0,135 - 0,00004t$	0,135	0,135
Bi_m	2,43	$2,43 + 0,00004t$	$2,43 - 0,00004t$

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos para os diferentes cálculos realizados. Os resultados estão ordenados em dois grupos:

- No primeiro grupo encontra-se, para cada caso, a evolução da temperatura no tempo, para diferentes posições adimensionais; o perfil de temperaturas em função da posição, para diferentes tempos; a evolução da umidade no tempo, para diferentes posições adimensionais e, o perfil da umidade em função da posição, para diferentes tempos.
- No segundo grupo são mostradas, para diferentes posições, os gráficos de temperatura vs tempo e de umidade vs tempo de todos os casos, com o objetivo de analisar a influência da variação dos parâmetros Lu , Bi_q e Bi_m .

Finalmente serão apresentadas observações e discussões referentes aos resultados.

4.1 Análise da Transferência Simultânea de Calor e Massa com Parâmetros Adimensionais Variando

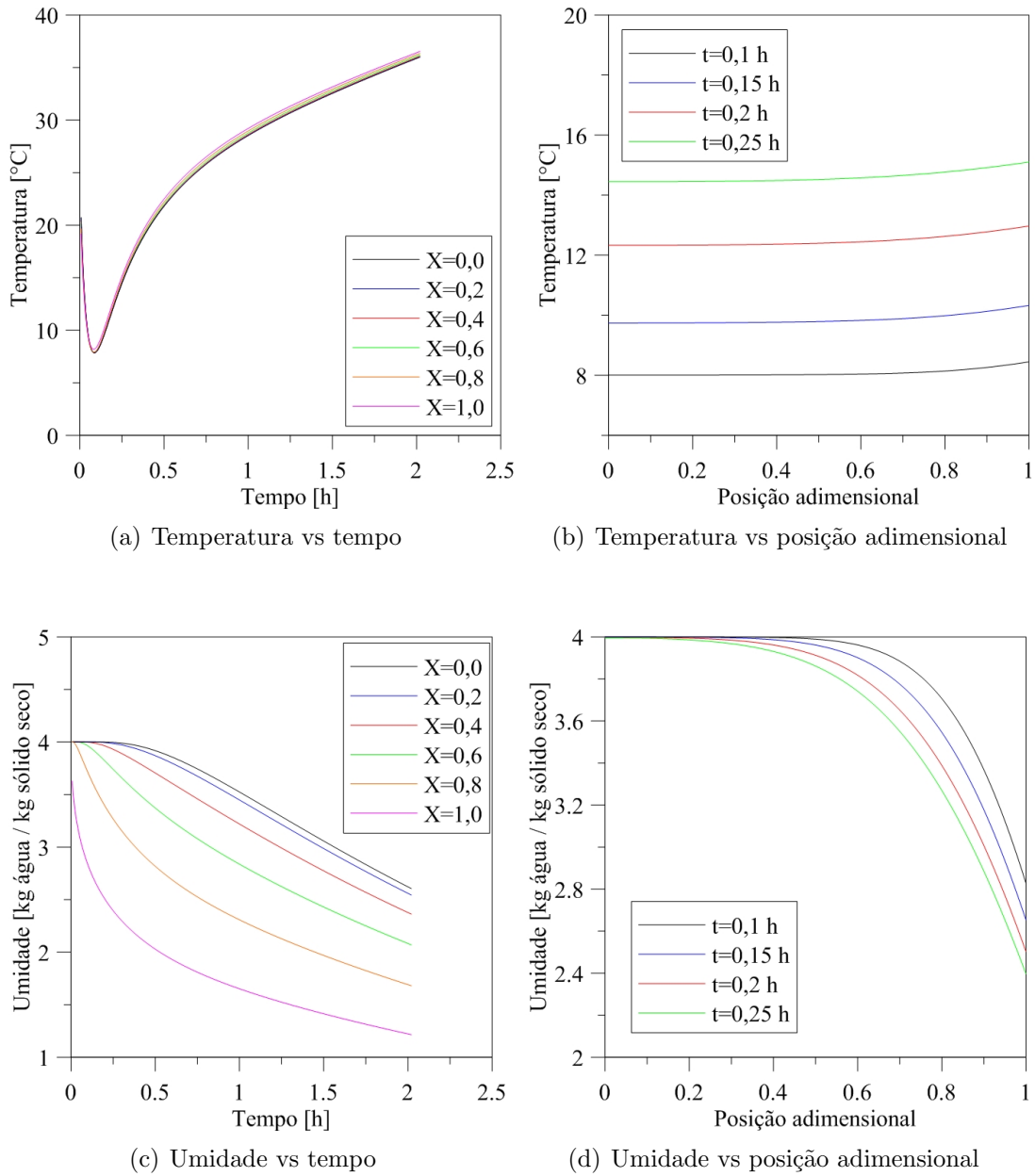
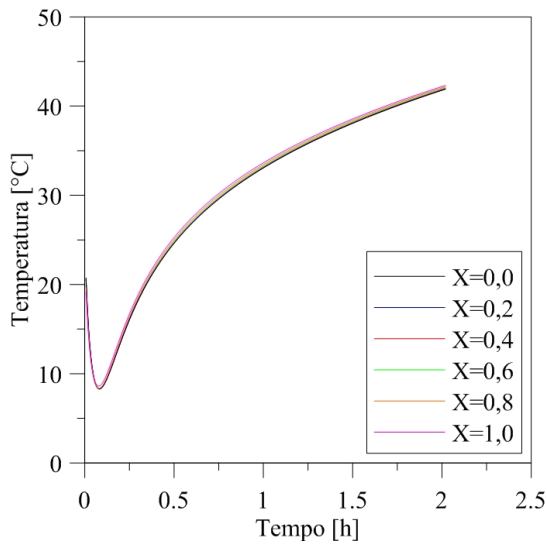
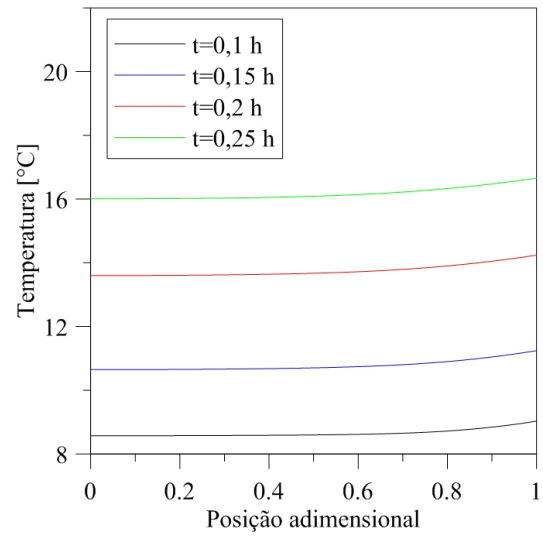


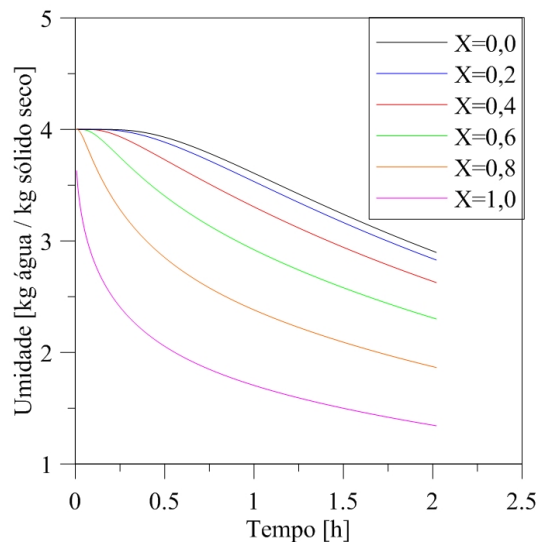
Figura 14. Resultados para o modelo considerando Lu crescente.



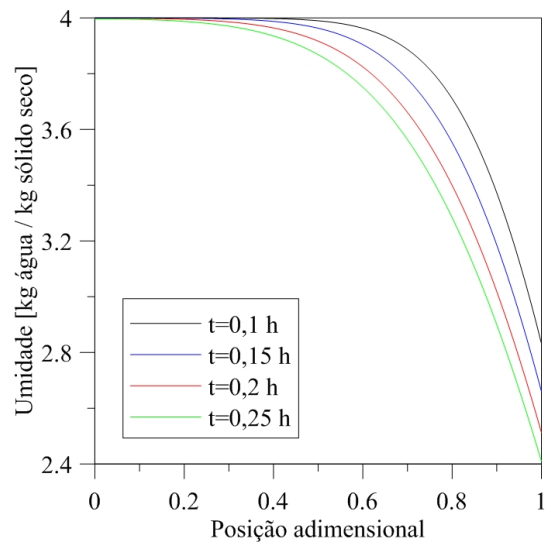
(a) Temperatura vs tempo



(b) Temperatura vs posição adimensional

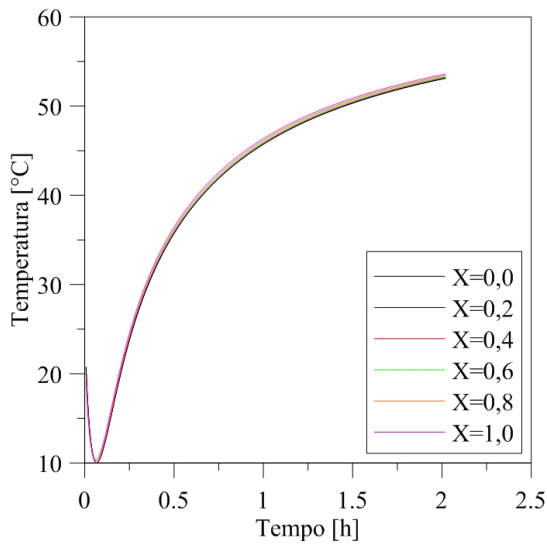


(c) Umidade vs tempo

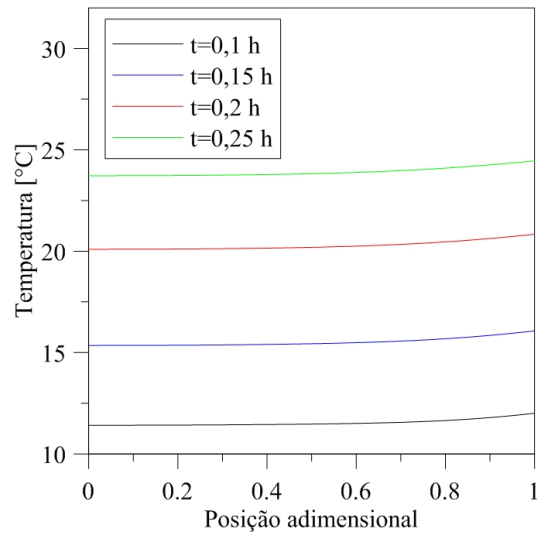


(d) Umidade vs posição adimensional

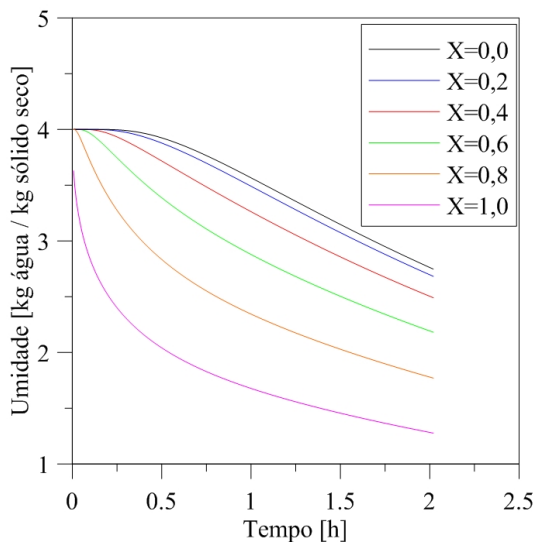
Figura 15. Resultados para o modelo considerando Lu decrescente.



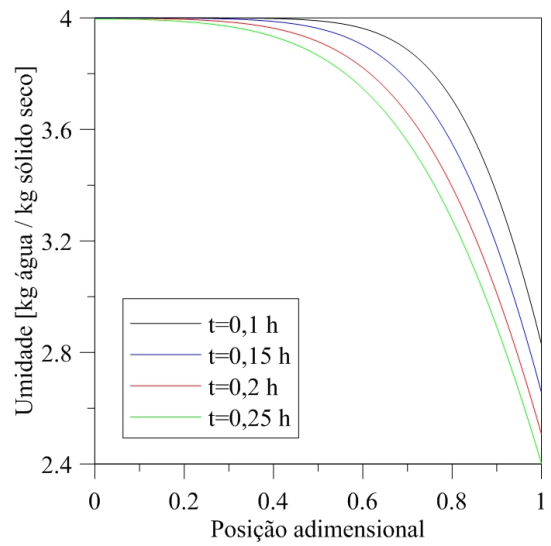
(a) Temperatura vs tempo



(b) Temperatura vs posição adimensional

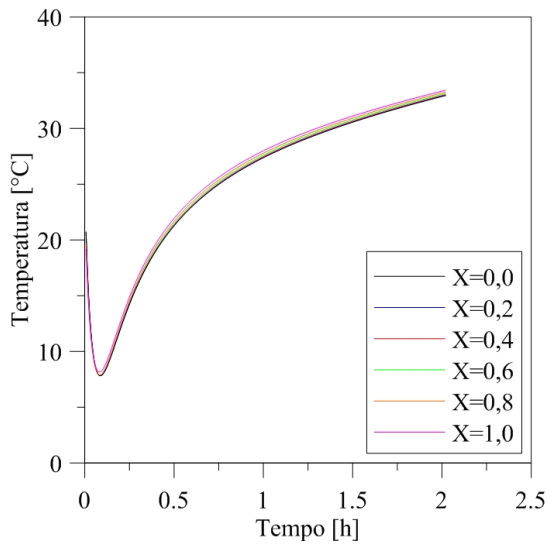


(c) Umidade vs tempo

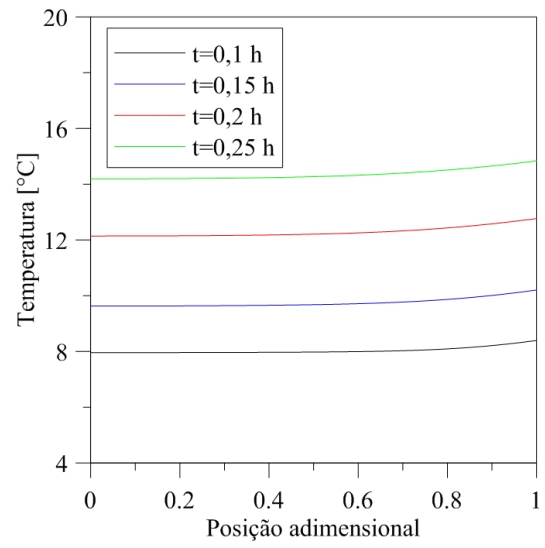


(d) Umidade vs posição adimensional

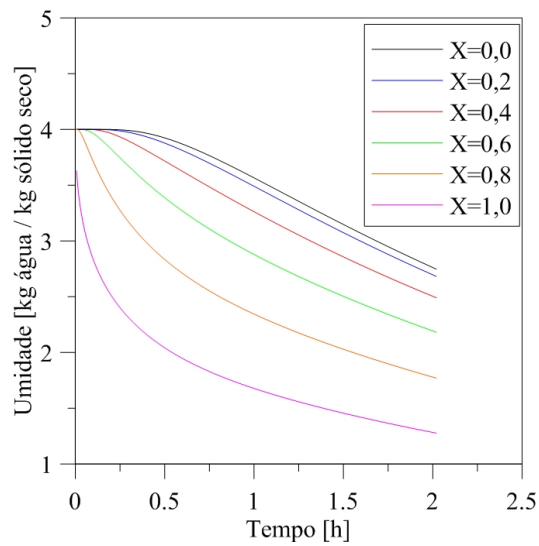
Figura 16. Resultados para o modelo considerando Bi_q crescente.



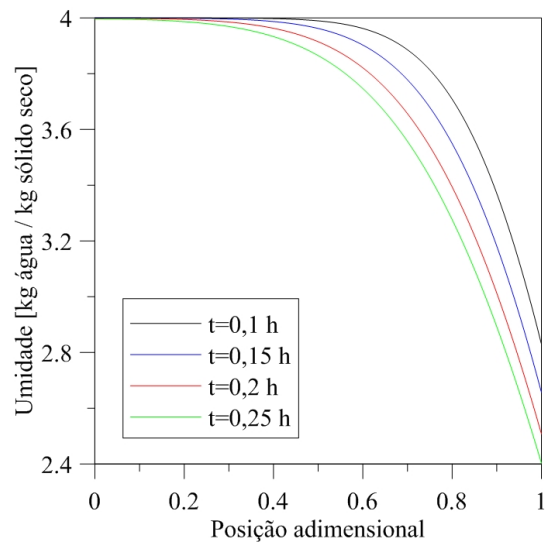
(a) Temperatura vs tempo



(b) Temperatura vs posição adimensional

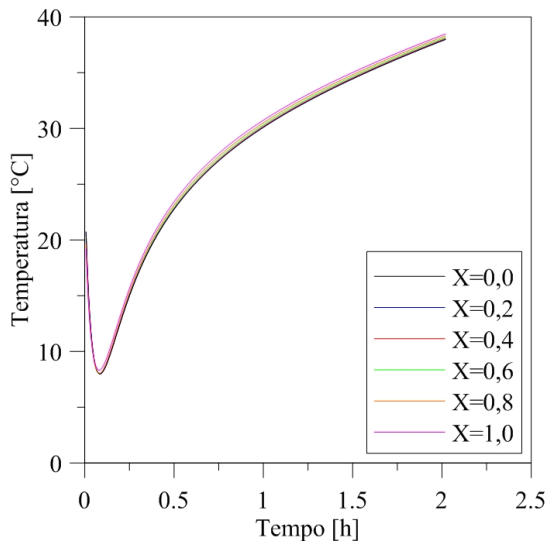


(c) Umidade vs tempo

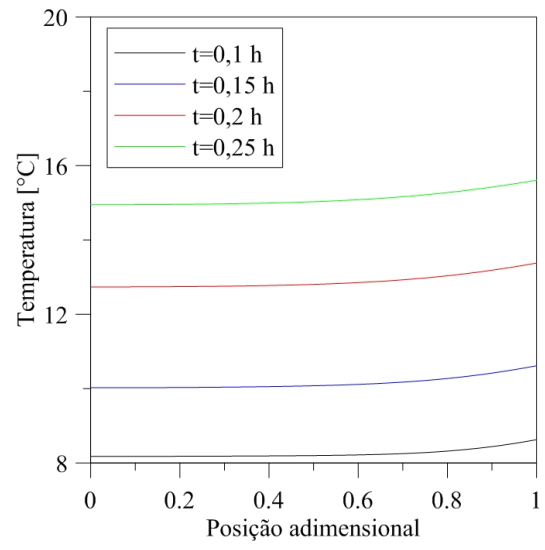


(d) Umidade vs posição adimensional

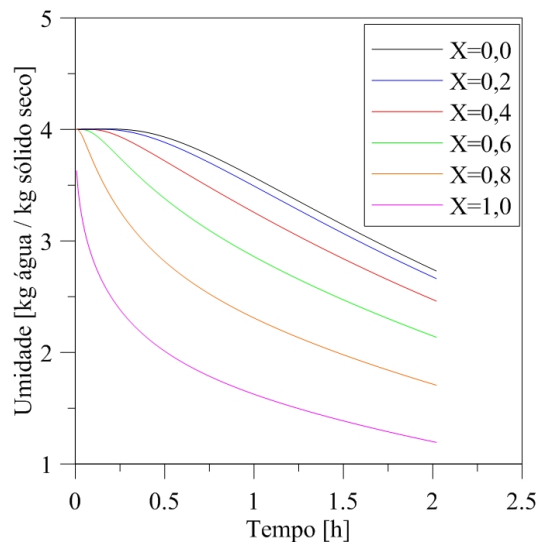
Figura 17. Resultados para o modelo considerando Bi_q decrescente.



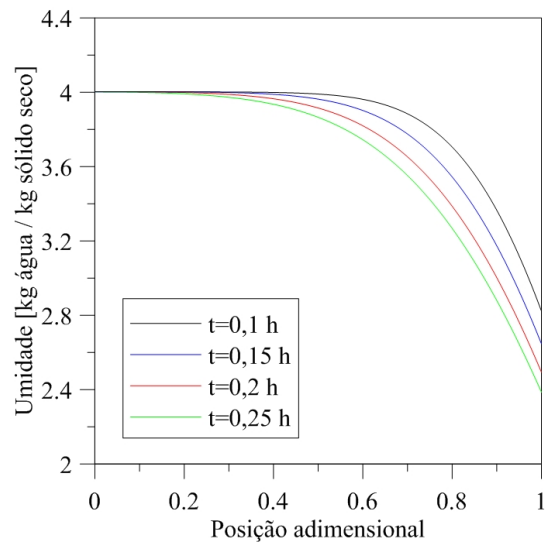
(a) Temperatura vs tempo



(b) Temperatura vs posição adimensional



(c) Umidade vs tempo



(d) Umidade vs posição adimensional

Figura 18. Resultados para o modelo considerando Bi_m crescente.

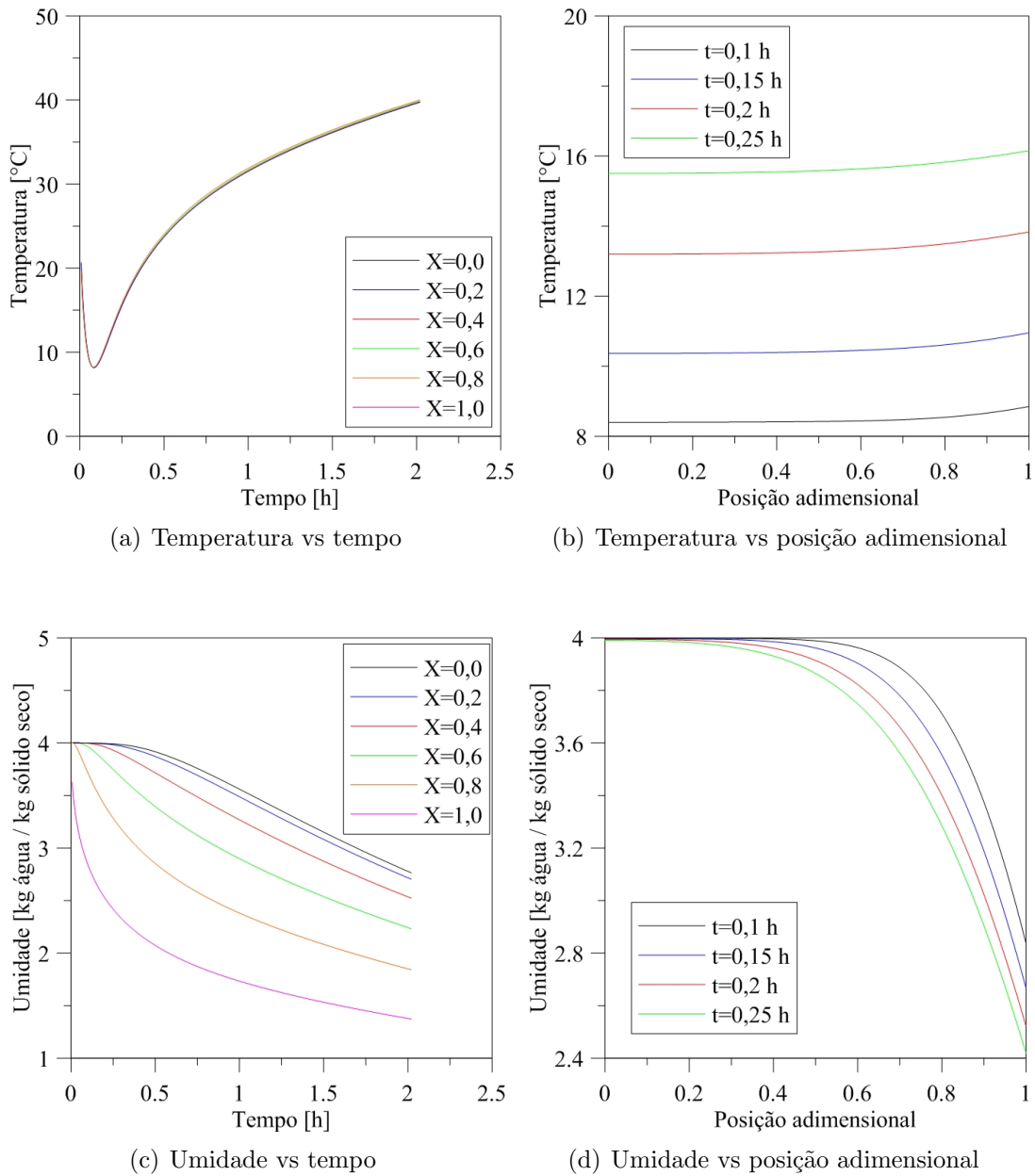


Figura 19. Resultados para o modelo considerando Bi_m decrescente.

Em termos gerais, em todos os graficos se observa o comportamento esperado:

- nos gráficos 14(a), 15(a), 16(a), 17(a), 18(a) e 19(a) se observa que a temperatura aumenta de forma assintótica após uma queda inicial, a qual será explicada mais adiante. O aumento de forma assintótica se deve a que a temperatura do ar é constante e maior do que a temperatura do alimento. Portanto, a temperatura máxima que o alimento pode adquirir é a temperatura do ar.
- nos gráficos 14(b), 15(b), 16(b), 17(b), 18(b) e 19(b) se observa que a temperatura é levemente maior na superfície do alimento. Isso se explica porque o ar quente é

o responsável pelo aumento da temperatura. Consequentemente, a superfície do alimento tenderá a ter uma temperatura maior.

- nos gráficos 14(c), 15(c), 16(c), 17(c), 18(c) e 19(c) se observa que a umidade diminui de forma assintótica. Isso se explica porque a menor umidade possível é a umidade do ar, pois o mesmo é mais seco do que o alimento (de outra forma, a secagem não seria possível).
- nos gráficos 14(d), 15(d), 16(d), 17(d), 18(d) e 19(d) se observa que a umidade é maior no interior do alimento. Isso faz sentido pois, como se estudou na seção 2.4.1, a umidade se transporta desde o interior do alimento para a superfície do mesmo.

No começo do processo de secagem, observa-se uma queda da temperatura (gráficos 14(a), 15(a), 16(a), 17(a), 18(a) e 19(a)), a qual aumenta durante o resto do processo. No mesmo intervalo de tempo, se observa uma forte queda na umidade (gráficos 14(c), 15(c), 16(c), 17(c), 18(c) e 19(c)), sobre tudo na superfície ($X = 1$), devido ao fato que o mecanismo convectivo de transferência de calor é intenso, em virtude da evaporação da água na superfície do alimento. No modelo de Luikov, a vaporização é contínua a coeficientes constantes. Portanto, toda a energia transferida pelo mecanismo de condução, dentro do alimento, é utilizada para evaporar a umidade na superfície. A consequência disso é uma queda de temperatura no alimento.

Com o decorrer do tempo, a energia transferida ao alimento é maior que a requerida para a evaporação de umidade na superfície, permitindo a transferência de calor para o interior do alimento, provocando um aumento na sua temperatura.

Nos gráficos 14(d), 15(d), 16(d), 17(d), 18(d) e 19(d) se observa um patamar na região próxima a $X = 0$. Isso se explica porque, no começo, o mecanismo de transferência de massa é somente convectivo. Com o decorrer do tempo, se forma um gradiente de umidade, o que provoca a difusão dentro do alimento. Esse gradiente de umidade começa a se desenvolver na região próxima à superfície, atingindo, mais tarde, a região interna do alimento. É por isso que no começo do processo, a umidade no interior do alimento não sofre alterações.

4.2 Estudo dos Parâmetros Adimensionais das Equações de Luikov

4.2.1 Comparação dos resultados variando Lu

Nas Figuras 20 e 21 são apresentados os gráficos de temperatura em função do tempo e de umidade em função do tempo, respectivamente, para diferentes posições, variando Lu .

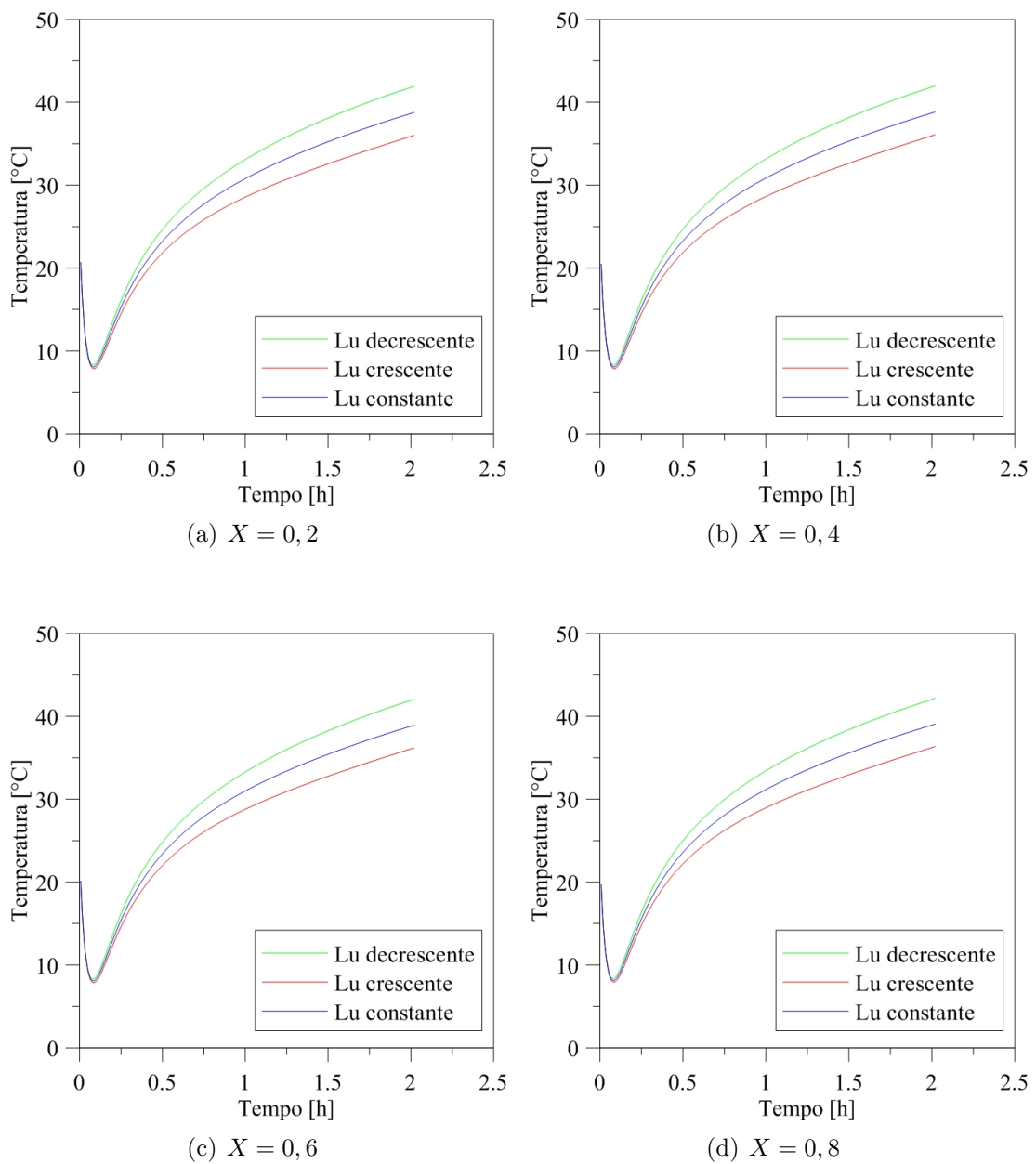


Figura 20. Gráficos de temperatura vs tempo: variando Lu .

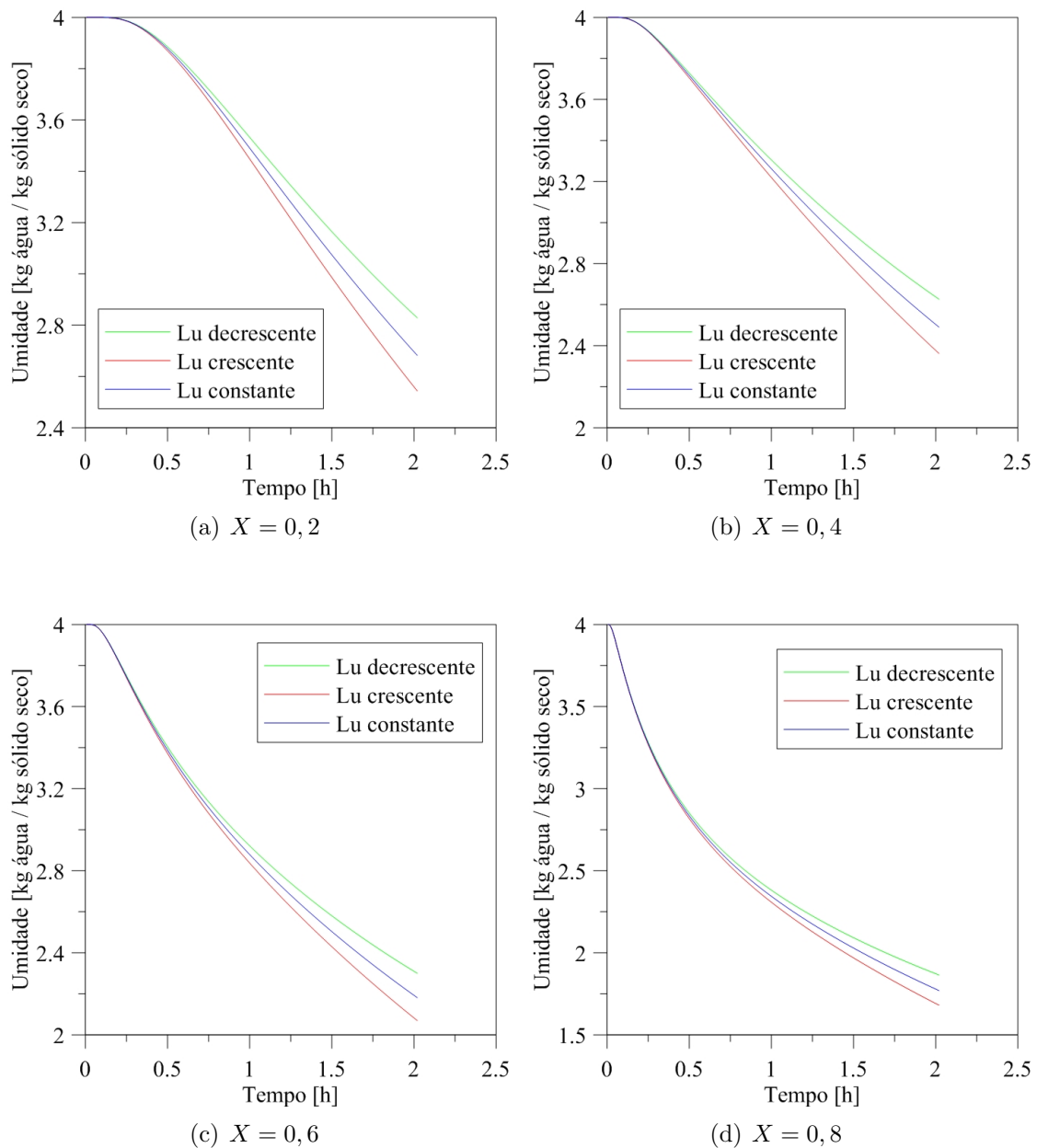


Figura 21. Gráficos de teor de umidade vs tempo: variando Lu .

Nos gráficos da figura 20 pode-se observar que as temperaturas do caso 2 (Lu decrescente) são maiores que as temperaturas do caso base (Lu constante), as quais são maiores que as temperaturas do caso 1 (Lu crescente). Lembrando que $Lu = a_m/a$, e que está sendo analisada a temperatura, Lu crescente se traduz em uma difusividade térmica decrescente, ocasionando que a temperatura aumente com menor rapidez.

Nos gráficos da figura 21 se observa que a queda de umidade é mais intensa no

caso 1 (Lu crescente). Isso se deve a que Lu crescente equivale a uma difusividade mássica crescente. Por tanto, a umidade é transferida mais rapidamente que nos outros casos.

4.2.2 Comparação dos resultados variando Bi_q

Nas Figuras 22 e 23 são mostrados os gráficos de temperatura em função do tempo e de umidade em função do tempo, respetivamente, para diferentes posições, variando Bi_q .

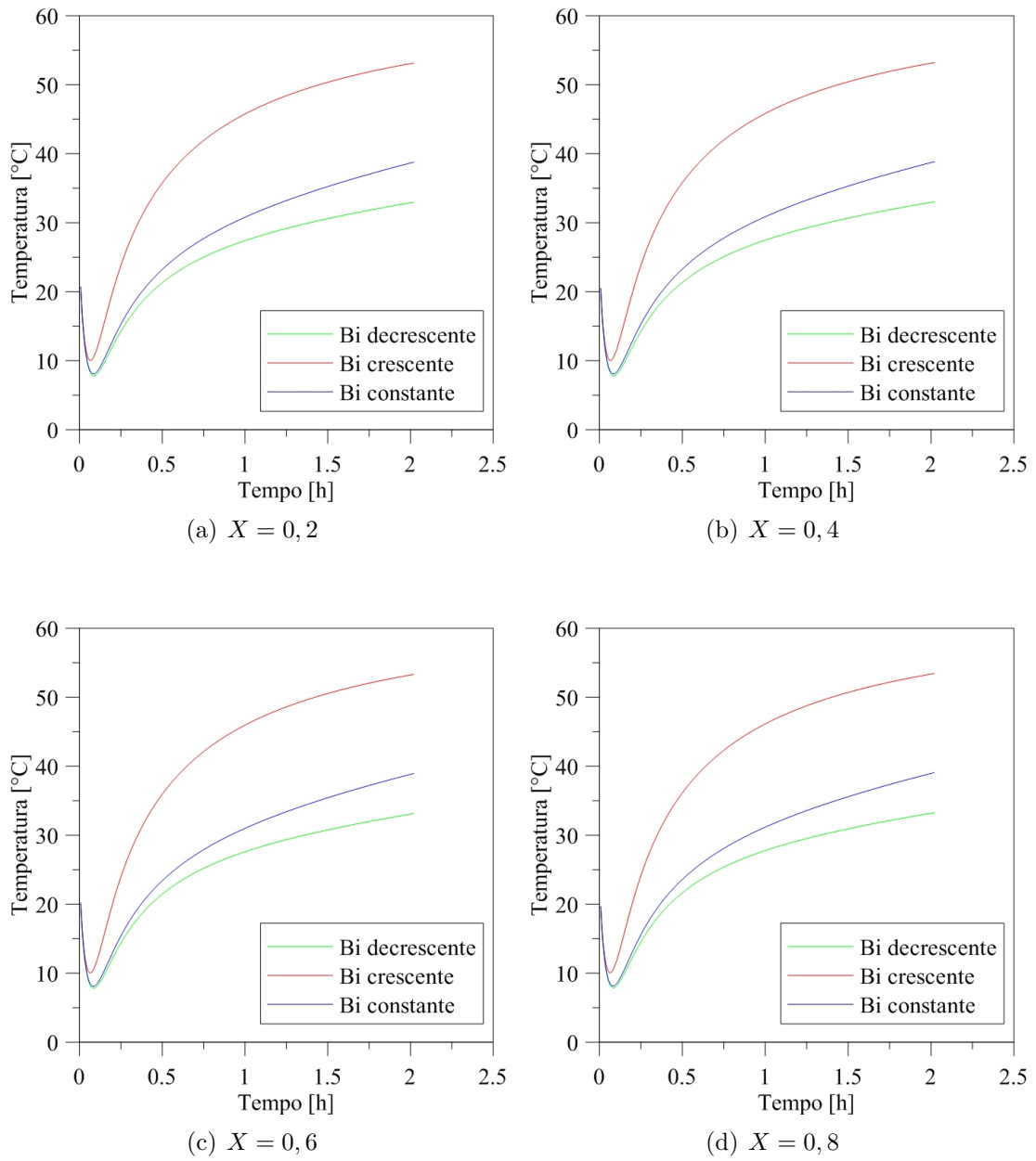


Figura 22. Gráficos de temperatura vs tempo: variando Bi_q .

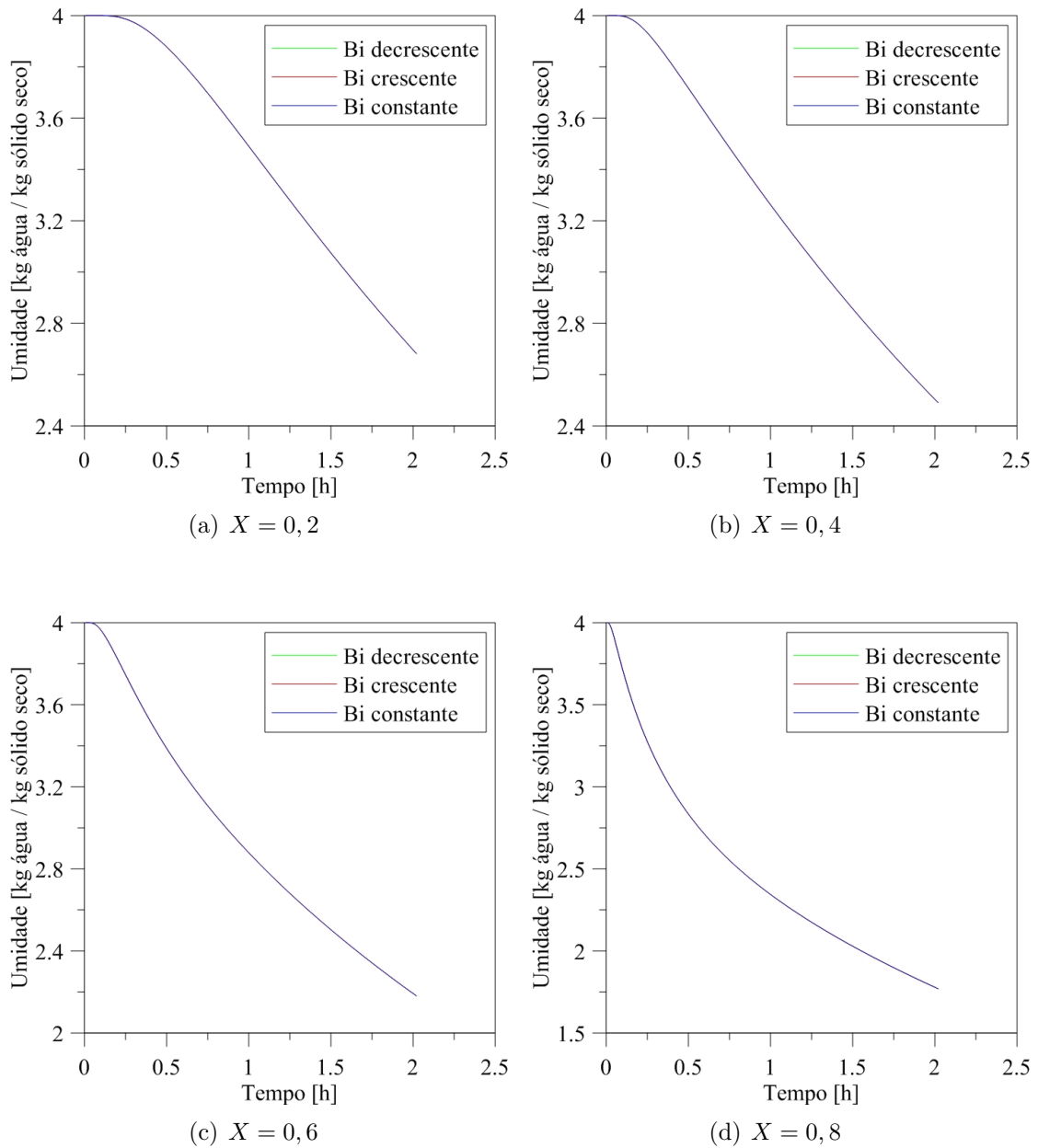


Figura 23. Gráficos de umidade vs tempo: variando Bi_q .

Nos gráficos da figura 22 pode-se observar que as temperaturas do caso 3 (Bi_q crescente) são maiores que as temperaturas do caso base (Bi_q constante), as quais são maiores que as temperaturas do caso 4 (Bi_q decrescente). Lembrando que $Bi_q = h_c L / K$, Bi_q crescente equivale a dizer que a taxa de crescimento do coeficiente convectivo é maior que a taxa de crescimento do coeficiente condutivo. Para que ocorra transferência de calor no interior do alimento (condução), é preciso que antes ocorra uma transferência de calor na superfície (convecção), provocando um gradiente de temperatura. Portanto, um aumento no coeficiente convectivo se traduz em um

aumento na temperatura, mesmo que o coeficiente condutivo aumente a uma taxa menor ou mesmo se diminui, pois um gradiente de temperatura grande compensará um coeficiente de condução pequeno.

Nos gráficos da figura 23 se observa que a queda de umidade é idêntica para os todos os casos. Isso faz sentido devido a que Bi_q tem uma influência insignificante sobre a transferência de massa.

4.2.3 Comparação dos resultados variando Bi_m

Nas figuras 24 e 25 são apresentados os gráficos de temperatura em função do tempo e de umidade em função do tempo, respetivamente, para diferentes posições, variando Bi_m .

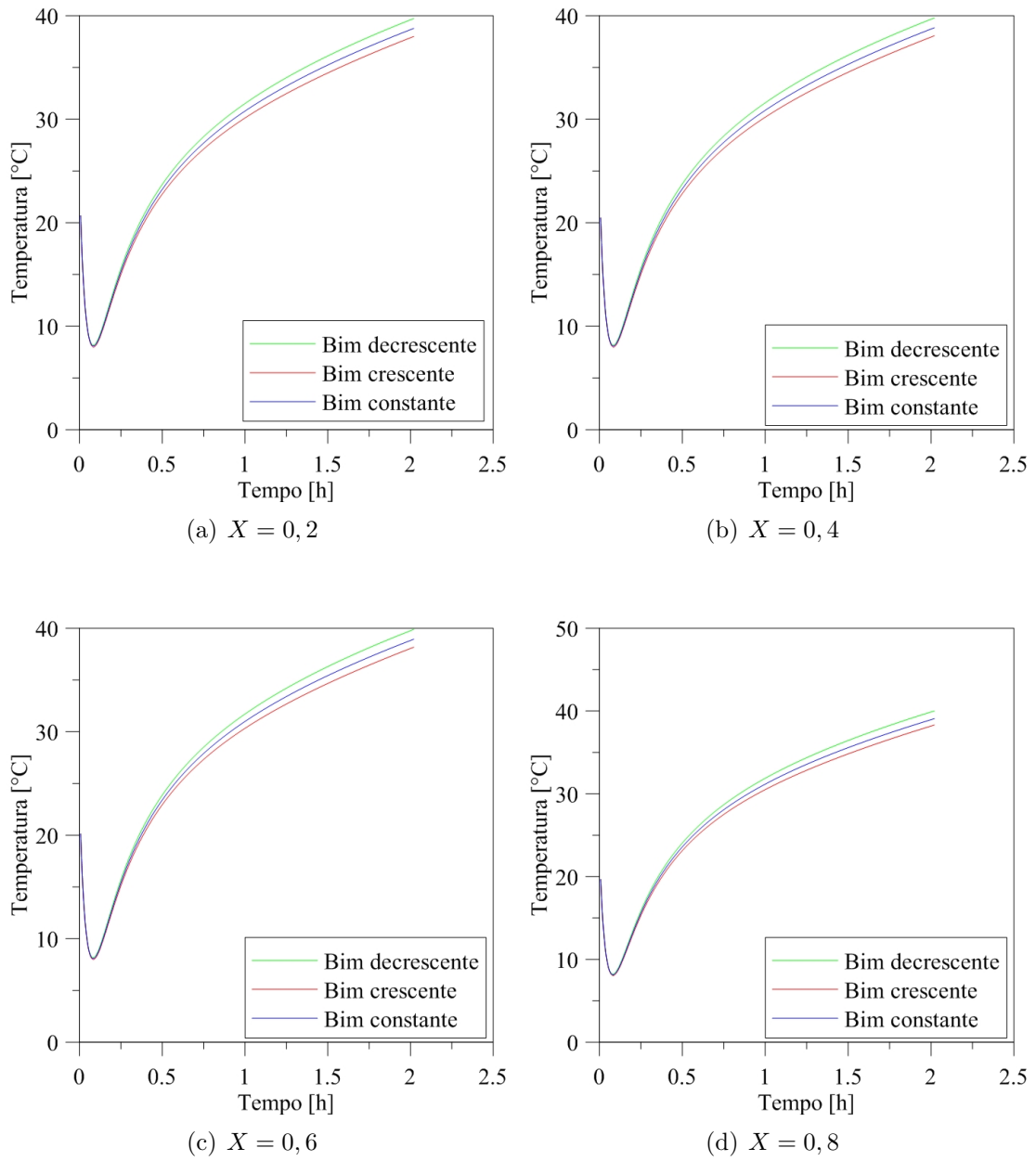


Figura 24. Gráficos de temperatura vs tempo: variando Bi_m .

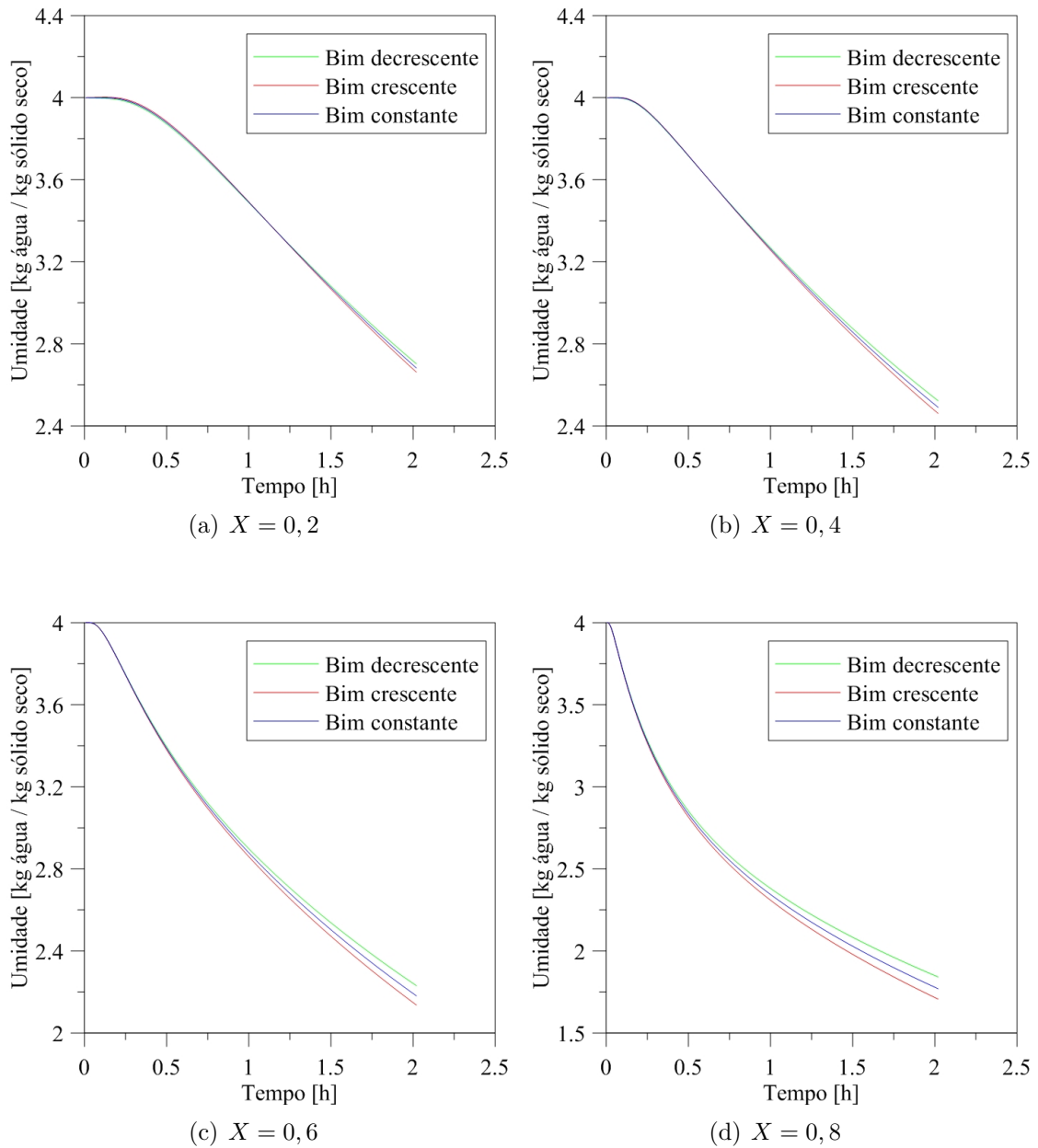


Figura 25. Gráficos de umidade vs tempo: variando Bi_m .

Nos gráficos da figura 24 pode-se observar que as temperaturas do caso 6 (Bi_m decrescente) são maiores que as temperaturas do caso base (Bi_m constante), as quais são maiores que as temperaturas do caso 5 (Bi_m crescente). Lembrando que $Bi_m = h_m L / K_m$, Bi_m decrescente equivale a dizer que a taxa de crescimento do coeficiente condutivo (difusão) é maior que a taxa de crescimento do coeficiente convectivo (evaporação). Se a água tende a permanecer dentro do alimento, a energia térmica dela provocará que a temperatura aumente mais rápido que se ela fosse evaporada, ou seja, menos água será evaporada na interface alimento ar.

Nos gráficos da figura 25 se observa que a queda de umidade é mais intensa no caso 5. Isso faz sentido pois um maior Bi_m é equivalente a uma maior evaporação, a qual se traduz em um maior gradiente de concentração de umidades, o que ocasiona uma maior transferência de massa no interior do alimento.

5. CONCLUSÕES

Os modelos matemáticos podem ser uma ferramenta útil para otimizar o processo de secagem de alimentos, tendo como efeitos a diminuição de perdas na produção e a padronização da qualidade do produto, entre outros.

Entender os fenômenos físicos que acontecem durante o processo de secagem e as leis que os governam é fundamental para conseguir fazer uma modelagem matemática que os represente fielmente.

O modelo de Luikov é adequado para descrever o fenômeno de secagem, pois considera a transferência de massa e a transferência de calor simultaneamente e tem sido usado por vários autores.

O estudo de métodos híbridos numérico analíticos, como a GITT, é de grande utilidade para resolver problemas complexos, como o modelo de Luikov.

Os efeitos da variação dos parâmetros Lu , Bi_q e Bi_m sobre a temperatura e a umidade foram os esperados. Quando Lu aumenta, a temperatura e a umidade são maiores que quando Lu diminui. Quando Bi_q cresce, a temperatura é maior que quando decresce, enquanto a umidade permanece a mesma. Quando Bi_m cresce, a temperatura e a umidade são maiores que quando decresce.

O modelo de Luikov apresenta uma forte sensibilidade em relação aos parâmetros Lu , Bi_q e Bi_m . Portanto, é interessante fazer um trabalho experimental para contrastar com os resultados teóricos, com o objetivo de encontrar as melhores funções para os parâmetros.

Para avaliar se o modelo com parâmetros termofísicos variáveis entrega resultados mais precisos, seria necessário contrastá-lo com resultados experimentais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BELESSIOTIS, V.; DELYANNIS, E. Solar drying. **Solar Energy**, n. 85, p. 1665-1691, 2011.
- [2] LUIKOV A. V. **Heat and Mass Transfer**, Mir Publishers, 1980
- [3] SILVA, Cristiane Kelly Ferreira. **Estimação de parâmetros de secagem de alimentos - Formulação de Luikov e uso da transformada integral generalizada**. Tese de doutorado, UFPB, 2010.
- [4] KROLL, K., KAST, W., Geschichtliche Entwicklung der Trocknungstechnik. **Trocknen und Trockner in der Produktion**, Volume3, p. 574. Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [5] HOMEGROWN-life-drying-raisins.jpg. Formato JPEG. Disponível em <<http://homegrown.org>>. Acesso em 29/06/15.
- [6] sultanas-farmers-program-07.jpg. Formato JPEG. Disponível em <<http://www.batafood.com/products/sultana-raisins/>>. Acesso em 29/06/15.
- [7] BELESSIOTIS, V.; DELYANNIS, E. Drying: methods and systems - principles of drying procedures. Sideris Publishing, Athens, 2009. p.844.
- [8] BELESSIOTIS, V.; DELYANNIS, E. Drying of grapes by solar energy. In: Proc. Solar World Congress of Internations Solar Energy Society on "Clean and Safe Energy Forever" vol. 2, 1989, Kobe, Japan, p. 1510-1514.
- [9] PANGAVHANE, D. R., SAWHNEY, R. L. Review of reasearch and developing work on solar dryers for grape drying. **Energy Conversion and Management**, n.43 (1), p. 45-61, 2002.
- [10] McVEIGH, S. Fruit growers profit with speed dryer. **Farmer's Weekly**, p. 7-10, March 12, 1999.
- [11] 5-3.jpg. Formato JPEG. Disponível em <<http://biorenaces.mx/>>
- [12] JAYARAMAN, K. S.; DAS GUPTA, D. K. **Handbook of Industrial Drying**, 2. ed. Mujumdar, A. S., 1998, vol 1, p. 643-690.
- [13] EL PASO SOLAR ENERGY ASSOCIATION. **Solar Food Drying**. Disponível em < <http://www.epsea.org/dry.html> >.
- [14] fabrica4.jpg. Formato JPEG. Disponível em <<http://frutosdaserra.ind.br>>

- [15] EKECHUKWU, O.V., Review of solar-energy drying systems I: an overview of drying principles and theory. **Energy Conversion and Management**, n. 40, p. 593-613, 1999.
- [16] LEON, M. A., KUMAR, S., BHATTACHAYA, S. C. A comprehensive procedure for performance evaluation of solar dryers. **Renewable & Sustainable Energy Reviews**. n. 6, p. 367-393, 2002.
- [17] MIKHAILOV, M. D. and ÖZISIK, M. N. **Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion**, Dover Publications, Inc., New York, 1984.
- [18] PONTES, P., *et al*, Mass transfer simulation of biodiesel synthesis in microreactors. **Computers and Chemical Engineering**, n. 93, p. 36-51, 2016.
- [19] KNUPP, D., *et al*, Theoretical analysis of conjugated heat transfer with a single domain formulation and integral transforms. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, n. 39, p. 355-362, 2012.
- [20] KNUPP, D., *et al*, Fluid flow and conjugated heat transfer in arbitrarily shaped channels via single domain formulation and integral transforms. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, n. 82, p. 479-489, 2015.
- [21] KNUPP, D., *et al*, Transient conjugated heat transfer in microchannels: Integral transforms with single domain formulation. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, n. 88, p. 248-257, 2015.
- [22] CASTELLÕES, F., *et al*, Convective heat transfer enhancement in low Reynolds number flows with wavy walls. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, n. 53, p. 2022,2034, 2010.
- [23] DANTAS, L., *et al*, Improved lumped-differential formulations and hybrid solution methods for drying in porous media. **International Journal of Thermal Sciences**, n. 46, p. 878-889, 2007.
- [24] CONCEIÇÃO, R., *et al*, Hybrid integral transform solution for the analysis of drying in spherical capillary-porous solids based on Luikov equations with pressure gradient. **International Journal of Thermal Sciences**, n. 71, p. 216-236, 2013.
- [25] KADEM, S., LACHEMET, A., YOUNSI, R., KOCAFE, D. 3d-Transient modeling of heat and mass transfer during heat treatment of wood. **International Communications in Heat and Mass Transfer**. n 38, p. 717-722, 2011.

- [26] KOCAEFE, D; YOUNSI, R.; PONCSAK, S.; KOCAEFE, Y. Comparison of different models for the high-temperature heat-treatment of wood. **International Journal of Thermal Sciences**, n. 46, p. 707-716, 2007.
- [27] YOUNSI, R.; KOCAEFE, D.; PONCSAK, S.; KOCAEFE, Y. Thermal modelling of the high temperature treatment of wood based on Luikov's approach. **International Journal of Energy Research**, n. 30, p. 699-711, 2006.
- [28] SONG, D; LIU, Z.; WANG G. Correction of temperature and moisture distributions in wood drying. **Numerical Heat Transfer**, n. 42, p. 585-602, 2002.
- [29] DIETENBERGER, M. Using a squash-heat-pulse method to determine heat and moisture transfer properties for porous orthotropic wood products or cellular solid materials. **Journal of Thermal Analysis and Calorimetry**, n. 83, p. 97-106, 2006.
- [30] MARTINES-LÓPEZ, E., LIRA-CORTÉZ, L. Evaluación de los factores de influencia en el modelo de Luikov durante el secado de ladrillo. **Ingeniería Investigación y Tecnología**, n. 17, p. 35-44, 2016.
- [31] NADI, F.; RAHIMI, G. H.; YOUNSI, R.; TAVAKOLI, T.;HAMIDI-ESFAHANI, Z. Numerical Simulation of Vacuum Drying by Luikov's Equations. **Drying Technology**, n. 30, p. 197-206, 2012.
- [32] MAZZA, M. G. G.; BISCAIA E. C.; MASSARANI, G. Study of Drying of a Porous Medium Using Gamma-Ray Attenuation Technique. **Drying Technology**, n.24, p. 259-267, 2006.
- [33] ÖZISIK, M. N. **Heat Conduction**, 2 ed., John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [34] RIBEIRO, J. W., COTTA, R. M., MIKHAILOV, M. D. Integral Transform Solution of Luikov's Equations for Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Media. **International Journal Heat and Mass Transfer**, n. 36, p. 4467-4475, 1993.
- [35] COTTA, R. M. **Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow**, CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [36] mass-balance.png. Formato PNG (Adaptado). Disponível em <<http://www.akts.com/>>.
- [37] Magic-b-font-font-b-Cube.jpg. Formato JPEG. Disponível em <<http://es.aliexpress.com>>. Acesso em 29/06/15.

- [38] LEMOS, N. A Intrigante Epidemia do “Divergente”. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 25, n. 4, p. 358, 2003.

A. ANEXOS

A.1 Divergência

Se considera um elemento de volume como o da figura 26 e um campo vetorial \vec{F}

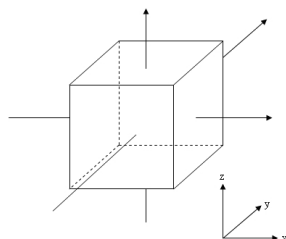


Figura 26. Elemento de volume [36]

A divergência[38] de um campo vetorial mede a diferença entre o fluxo do campo vetorial que sai e o fluxo que entra, sobre a superfície que rodeia um volume de controle.

Matematicamente, equivale a fazer o produto escalar entre o operador $\vec{\nabla}$ e o campo vetorial \vec{F} . Assim, para coordenadas cartesianas, a divergência de um campo vetorial \vec{F} se calcula da seguinte forma

$$\text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \quad (93)$$

É importante observar que a divergência é positiva quando o escoamento é “para fora” do elemento de volume. Portanto, algumas vezes, tal como nas equações (4) e (16) será necessário antepor um sinal negativo, pois o lado esquerdo das equações é positivo quando a massa ou a energia aumentam, respectivamente, o que quer dizer que o lado esquerdo é positivo quando entra massa ou energia no elemento de volume, enquanto a divergência tem o comportamento contrário.

A.2 Manipulação Matemática

A seguir, se realizará uma manipulação matemática da equação (16) com a finalidade de juntá-la com a equação (4) e acoplar a transferência de calor com a transferência de massa.

- **Primeiro termo:** o lado esquerdo da equação (16) pode ser escrito como se mostra em (94).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(h_0 \rho_0 + \sum_i h_i \rho_0 u_i \right) = \rho_0 \frac{\partial h_0}{\partial t} + \rho_0 \sum_i \frac{\partial (h_i u_i)}{\partial t} \quad (94)$$

Aplicando a regra da cadeia se obtém (95).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(h_0 \rho_0 + \sum_i h_i \rho_0 u_i \right) = \rho_0 \frac{\partial h_0}{\partial t} + \rho_0 \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial t} u_i + \rho_0 \sum_i h_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (95)$$

Lembrando que o calor específico é definido como

$$c_i = \frac{dh_i}{dT} \quad (96)$$

Pode-se deduzir (97).

$$dh_i = c_i \cdot dT \quad (97)$$

Substituindo (97) em (95) se obtém (98).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(h_0 \rho_0 + \sum_i h_i \rho_0 u_i \right) = \rho_0 \left(c_0 + \sum_i c_i u_i \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 \sum_i h_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (98)$$

Definindo $c = (c_0 + \sum_i c_i u_i)$ se obtém (99).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(h_0 \rho_0 + \sum_i h_i \rho_0 u_i \right) = \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 \sum_i h_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (99)$$

- **Segundo termo:** como foi mencionado anteriormente, a densidade de fluxo de calor por condução está definida pela lei de Fourier. Portanto, é possível substituir (17) no segundo termo da equação (16).

$$-div \vec{j}_q = -div \left(-\lambda \vec{\nabla} T \right) = div \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) \quad (100)$$

- **Terceiro termo:** aplicando a regra da cadeia se obtém (101).

$$div \left[\sum_i h_i \left(\overrightarrow{j_{i(dif)}} + \Pi \rho_i b_i \vec{V}_i \right) \right] = \sum_i h_i div \left(\overrightarrow{j_{i(dif)}} + \Pi \rho_i b_i \vec{V}_i \right) \quad (101)$$

$$+ \sum_i \vec{\nabla} h_i \cdot \left(\overrightarrow{j_{i(dif)}} + \Pi \rho_i b_i \vec{V}_i \right)$$

Da definição do calor específico pode-se deduzir (102).

$$\vec{\nabla} h_i = c_i \vec{\nabla} T \quad (102)$$

Substituindo (102) em (101) se obtém (103).

$$div \left[\sum_i h_i \left(\overrightarrow{j_{i(dif)}} + \Pi \rho_i b_i \vec{V}_i \right) \right] = \sum_i h_i div \left(\overrightarrow{j_{i(dif)}} + \Pi \rho_i b_i \vec{V}_i \right) \quad (103)$$

$$+ \sum_i c_i \vec{\nabla} T \cdot \left(\overrightarrow{j_{i(dif)}} + \Pi \rho_i b_i \vec{V}_i \right)$$

Finalmente, juntando (99), (100) e (103), se obtém (104).

$$\begin{aligned}
\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 \sum_i h_i \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \operatorname{div} \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) - \\
&- \sum_i h_i \operatorname{div} \left(\overrightarrow{j_{i(di f)}} + \Pi \rho_i b_i \vec{V}_i \right) - \\
&- \sum_i c_i \vec{\nabla} T \left(\overrightarrow{j_{i(di f)}} + \Pi \rho_i b_i \vec{V}_i \right)
\end{aligned} \tag{104}$$

A.2.1 Equações Diferenciais para Transferência de Umidade em Processos de Secagem

Nesta parte, se relacionarão as equações (4) e (16) para formar o sistema de equações de Luikov. Primeiramente se multiplicará a equação (15) por h_i , e se somará sobre i . Assim, se obtém (105).

$$\sum_i h_i \rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} = - \sum_i h_i \operatorname{div} \left(\overrightarrow{j_{i(di f)}} + \Pi b_i \rho_i \vec{v}_i \right) + \sum_i h_i J_i \tag{105}$$

Substituindo na equação o lado direito da equação (105) no segundo termo do lado esquerdo da equação (104), se obtém (106).

$$\begin{aligned}
\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - \sum_i h_i \operatorname{div} \left(\overrightarrow{j_{i(di f)}} + \Pi b_i \rho_i \vec{v}_i \right) + \sum_i h_i J_i &= \operatorname{div} \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) - \\
&- \sum_i h_i \operatorname{div} \left(\overrightarrow{j_{i(di f)}} + \Pi \rho_i b_i \vec{V}_i \right) - \\
&- \sum_i c_i \vec{\nabla} T \left(\overrightarrow{j_{i(di f)}} + \Pi \rho_i b_i \vec{V}_i \right)
\end{aligned} \tag{106}$$

Se observa que o segundo termo do lado esquerdo é igual ao segundo termo do lado direito da equação anterior. Portanto, podem ser anulados, obtendo (107).

$$\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_i h_i J_i = \operatorname{div} \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) - \sum_i c_i \vec{\nabla} T \left(\overrightarrow{j_{i(di f)}} + \Pi \rho_i b_i \vec{V}_i \right) \tag{107}$$

Reordenando, se obtém a equação acoplada mostrada em (108).

$$\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) - \sum_i c_i \cdot (\overrightarrow{j_{i(dif)}} + \Pi \rho_i b_i \vec{V}_i) \cdot \vec{\nabla} T - \sum_i h_i J_i \quad (108)$$

Continuando com o raciocínio, se obtém o sistema de equações (109).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla a_m \nabla u + \nabla a_m \delta \nabla T \quad (109)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla a \nabla T + \varepsilon \frac{r_{21}}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (110)$$

onde

- a_m é o coeficiente de difusão ($[\frac{m^2}{s}]$)
- δ é o coeficiente termogradiante ($[K^{-1}]$)
- ε corresponde à fração da mudança de umidade correspondente à evaporação (adimensional)
- a é o coeficiente de difusividade térmica ($[\frac{m^2}{s}]$)
- r_{21} é o calor latente de evaporação ($[\frac{J}{kg}]$)

O coeficiente de difusão e o calor latente de evaporação são amplamente conhecidos e, portanto, não precisam ser explicados. Porém, o coeficiente termogradiante e a fração da mudança de umidade correspondente à evaporação serão explicados a seguir.

• Coeficiente termogradiante

Se define como a razão entre a queda de umidade (Δu) e a queda de temperatura (ΔT) em regime permanente e sem transferência de umidade ($j = 0$).

$$\delta_u = \left(\frac{\Delta u}{\Delta T} \right)_{j=0} \quad (111)$$

Devido ao fato que o sistema de equações de Luikov acopla a transferência de calor com a transferência de massa, o coeficiente termogradiante é muito importante para definir a interrelação entre o conteúdo de umidade e a temperatura.

- **Fração de mudança de umidade correspondente à evaporação**

Como foi estudado na seção 2.6.1, as espécies (vapor, água líquida) podem entrar ou sair do elemento de volume, seja por difusão ou por escoamento. Entretanto, também podem ser geradas devido a mudanças de fase.

O coeficiente ε corresponde à porção de água líquida perdida em um elemento de volume, que foi evaporada. Por exemplo, se $\varepsilon = 0$, quer dizer que não houve evaporação e que toda a água perdida foi por difusão ou escoamento. Se $\varepsilon = 1$, toda a água líquida perdida foi evaporada e não houve difusão nem escoamento.

O modelo de Luikov tem sido usado para diversas aplicações, as quais vão desde secagem de madeira [25][26][27][28][29] e tijolos [30], até técnicas de secagem mais complexas, como secagem no vácuo [31] e secagem com Raios Gamma [32].